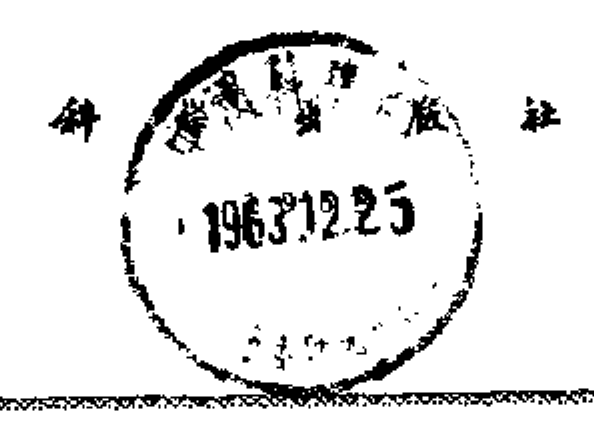
带有时滞的动力系统的运动稳定性

秦元勳　刘永清　王　联　著



科　学　出　版　社

内 容 簡 介

动力系統的自动控制一般都有时間滞后的因素，但工程师在处理这类問題时，往往忽略这一因素。本书系統地研究并处理了：在什么条件下，可以容許这种省略。当时滞影响大时，工程上要求对任何时滞，系統都要稳定。对这种全时滞的情形，本书給出了处理方法。本书为自动控制工作者及力学工作者提供了系統的方法与結論，也为数学工作者提供了一类研究問題。

带有时滞的动力系統的运动稳定性

秦元勳 刘永清 王 联 著

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963年11月第一版 书号：2906 字数：171,000

1963年11月第一次印刷 开本：850×1168 1/32

（京）0001—3,550 印张：6 5/8

定价：1.10元

序

随着自动控制技术的发展，时滞对于动力系統运动稳定性的影响受到技术工作者的广泛应用和研究工作者的更多的重視。

本书比較系統地探討了这方面的問題，其中若干方法与結果可适用于一般的运动稳定性問題。书中主要部分是 1957 年至 1960 年間刘永清、王联、蔡燧林等同志和我在中国科学院数学研究所共同进行的工作，其中也包括我們提交 1960 年 6 月在莫斯科召开的国际自动化会議的报告的詳細証明。

在研究工作进行过程中，中国自动化学会的同志們，特别是錢学森教授提供了宝貴的意見，推动了工作进一步地深入。特致謝意。

为了使本书自成系統，我們加上了一章預备知識，希望对讀者有所帮助。欢迎讀者批評与指正。

秦 元 勳

1960 年于北京



目　　录

第一章 总 論

§1. 問題的提出

大量的自然現象可以用动力系統来描述,例如:鐳元素的放射衰減的規律可以表示为

$$\frac{dR(t)}{dt} = -KR(t);$$

单摆振动的規律可以表示为

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t);$$

振蕩迴路中的电量变化的規律可以表示为

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = 0;$$

行星运动中二体問題的运动規律可以表示为

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -KmM\frac{x(t)}{(x^2(t) + y^2(t))^{3/2}},$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -KmM\frac{y(t)}{(x^2(t) + y^2(t))^{3/2}}$$

等等. 所有这些現象的数学模型都可用微分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \tag{1.1}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

及其初始条件

$$x_i(0) = x_i^0 \tag{1.2}$$

来描述. 这些現象都看作时間 t 的函数. 在写成这种数学模型时,方程組 (1.1) 的右方和左方都只是同一时間 t 的函数. 也就是說,我們假定了事物发展的趋向(方程組 (1.1) 的左方)只由其当前的

状态(方程組(1.1)的右方的 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$) 来决定，而不明显地依賴于其过去的状态. 以鐳的放射衰減为例，当前鐳的質量 $R(t)$ 的衰減率 $\frac{dR(t)}{dt}$ 只与当前鐳的質量 $R(t)$ 有关，而与过去的質量无关. 又例如在二体問題中，当前二个星球間之吸引力 $\left(m\frac{d^2x(t)}{dt^2}, m\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)$ 只与当前二个星球間的位置 $(x(t), y(t))$ 有关，而与过去二个星球間的位置无关. 可以簡单地說，这些現象都是瞬时起作用的. 在这种假設下的数学模型，与对大量事物的运动規律的描述是很好地符合的.

在研究自然現象中，客观事物的規律是复杂的和多样的. 不少的情形不仅需要考慮到事物的当前状态，而且还需要考慮事物过去的历史. 这两者的影响可能同时直接起着作用.

例 1. 在弹性理論中，考慮到"遺留效应"时，导出了方程[1]

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + a^2u(t) + \int_0^t K(t-\tau)\frac{du(\tau)}{d\tau}\,d\tau = f(t).$$

例 2. 在人口增长理論中，出現了所謂的"除旧更新"方程[2]

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(t-\tau)\frac{dG(\tau)}{d\tau}\,d\tau.$$

例 3. 在火箭燃燒的控制理論中，得到方程[3]

$$\frac{du(t)}{dt} + (1-n)u(t) + nu(t-\tau) = 0.$$

例 4. 在数理統計中，关于資本主义經济的周期性危机有过下面形式的方程[4]

$$\frac{du(t)}{dt} = au(t) + bu(t-\tau) + f(t).$$

例 5. 在近代核物理中用計数器測量質点源強度，引出方程[5]

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = -a[\pi(t) - \pi(t-\tau)e^{-a\tau}].$$

这些例子的共同特点之一是：方程右方不只依賴于 $u(t)$，而且依賴于 $u(t-\tau)$, $\tau > 0$ (或 $u(\tau)$, $\tau < t$)，亦即当前发展的趋向

明显地依賴于过去的历史狀况，也就是說，我們需要考慮时間滯后的现象，或簡称为"时滯"现象．这时的数学模型便不再是方程組(1.1)的类型，而应当是微分差分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), x_1(t-\tau_{i1}), \\ x_2(t-\tau_{i2}), \cdots, x_n(t-\tau_{in})) \\ \tau_{ij} > 0 \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.3}$$

这里一般說来，τ_{ij} 又可以是 t 的函数；至于初始条件，也不再象(1.2)那样簡单．这点下节再談到．

在自动控制問題中，由于在自动控制的任何系統中都存在着时滯(电流的，机械的，热的等等)，因而实际上的控制行动总是落后于理論上的未加时滯所得出的值[4]；尤其是当控制的精确度要求提高时，問題便更加突出．在工程处理方面，一般是略去了时滯不加考慮，也就是将方程組(1.3)中的 τ_{ij} 均用零代替，这样就得到方程組(1.1)．用普通方法解(1.1)所得的結論，便看作是(1.3)的結論，也就是說，可用微分方程来代替微分差分方程．因此，在数学上提出了一系列的問題，即这种作法的理論根据何在？在本书中，我們着重討論，带有时滯的动力系統的运动稳定性問題是否可以簡化为不带时滯的动力系統的运动稳定性問題，在什么条件下这种簡化是有根据的以及在什么条件下这种簡化会导出錯誤的結論．例如，虽然系統

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - 2x(t) = -x(t)$$

是稳定的，但是当 τ 比較大时，系統

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - 2x(t-\tau)$$

则是不稳定的．τ 使其系統稳定的界限必須加以确定，以便在这时可用微分方程代替微分差分方程．从稳定性的角度来看，τ 的大小是有条件的．决定这种条件是一种类型的問題．

这里还有另一种类型的問題．考慮到实际上 τ 的大小的测定是困难的，因此要問，对任何大于零的 τ，是否微分差分方程組

(1.3) 可用微分方程組 (1.1) 代替而仍保持其运动稳定性的特点．这时若在 τ 上不加条件，則在方程組(1.3)的系数上便需要加上条件．例如，虽然系統

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t) = (a + b)x(t)$$

当 $a + b < 0$ 时是稳定的，但是欲使系統

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau)$$

对所有的 $\tau > 0$ 都是稳定的，其充分而且必要的条件是

$$a + b < 0, \quad a - b \leqslant 0$$

同时满足．这里增加了一个新的条件 $a - b \leqslant 0$．这种新条件的确定，构成了另一种类型的問題．

运动稳定性的处理，有經典的李雅普諾夫的工作[7]．不过这是对于微分方程組 (1.1) 的．要将这些方法应用到微分差分方程組 (1.3)，必然出現一系列的新問題，特别是代数方程的根的实部符号的判定，要用超越方程的根的实部符号的判定来替代．这便形成又一种类型的問題．

为了使理論工作可以直接有助于工程技术的需要，就不能满足于一般經典的存在性結論，而必須給出明显的表达公式，使得实际工作者可以直接而簡单地驗証这些条件，以便保証設計工作的正确性．例如，不能满足于已有的李雅普諾夫函数的存在性定理，而需要給出明显的具体公式．这又形成一种类型的問題．

本书的目的在于系統地闡述上述各种类型的問題，而以带时滯的动力系統的运动稳定性的考慮为中心．在国际上，这些問題都正在发展中．

§2. 問題的性質与运动稳定性的定义

在本节我們将介紹若干基本假定及定义，还将叙述而不証明与此有关的定理，因为它們不是本书的主題．

首先是关于初值問題的提法[8]，以一阶的常时滯的情形为例，

方程

$$\frac{du(t)}{dt}=f(t,u(t),\ u(t-\tau))\quad \tau>0 \tag{2.1}$$

的初值不能只給在某一瞬时 $t=t_0$ 而必須給在一个区間，例如給定

$$u(t)=\varphi(t),\quad 当\ t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0.$$

同样,对于一阶的变时滞的情形来説,方程

$$\frac{du(t)}{dt}=f(t,u(t),u(t-\tau(t))),\tau(t)\geqslant 0 \tag{2.2}$$

的初值要給定在一个初始点集上，例如要决定 $t\geqslant t_0$ 时的解 $u(t)$，必須給定

$$u(t)=\varphi(t),\ 当\ t\in E_{t_0},$$

此地 E_{t_0} 表示一个初始点集，它由 $t=t_0$ 的点，及当 $t\geqslant t_0$ 时，$t-\tau(t)\leqslant t_0$ 的 $t-\tau(t)$ 的点所組成．在特殊情形中，E_{t_0} 也可能退化为一点.

在上述这些情形中，$\varphi(t)$ 称为初值函数．初值問題卽是在給定連續的初值函数的条件下,要求連續的解 $u(t)$.

对于具有时滞的 n 阶方程

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n}=f\left(t,u(t),\cdots,\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}},u(t-\tau(t)),\cdots,\right.$$
$$\left.\frac{d^{n-1}u(t-\tau(t))}{dt^{n-1}}\right),\qquad \tau(t)\geqslant 0, \tag{2.3}$$

它的初值問題是:在初始点集 E_{t_0} 上給定初始函数

$$u(t)=\varphi(t)\ 及\ \frac{d^k u(t)}{dt^k}=\varphi^{(k)}(t),\ k=1,2,\cdots,n-1,$$

要决定解 $u(t)$，使得在 $t\geqslant t_0$ 均为連續，并且其导函数一直到 $n-1$ 阶均为連續.

关于导数的要求，如果 E_{t_0} 退化为一点，或 t_0 是 E_{t_0} 中的孤立点,则在 t_0 点要求給以右方导数

$$\left.\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0+0}=u_0^{(k)},\ k=0,1,2,\cdots,(n-1).$$

关于导数問題，有时出現所謂“中立型”方程．以一阶的最簡单形式为例，方程

$$\frac{du(t)}{dt}=f\left(t, u(t), u(t-\tau(t)), \frac{du(t-\tau(t))}{dt}\right) \qquad (2.4)$$

的初始函数是：在初始点集 E_{t_0} 上給定

$$u(t)=\varphi(t) \text{ 及 } \frac{du(t)}{dt}=\frac{d\varphi(t)}{dt},$$

欲求 $t \geqslant t_0$ 时的連續解 $u(t)$.

在討論运动稳定性之前，首先要提到存在性及唯一性的条件．以(2.2)为例，如果 f, $\varphi(t)$ 及 $\tau(t)$ 都是連續函数，并且 $f(t, u(t), u(t-\tau))$ 对 $u(t)$ 及 $u(t-\tau)$ 两变量均滿足李卜西慈条件

$$|f(t, x_1, y_1)-f(t, x_2, y_2)| \leqslant K\{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\},$$

則可保証解的存在性及唯一性．同类性质的条件也可加到其他各种类型的方程．这种存在性及唯一性的充分条件，本书中均設其已滿足．

順便提及一点，当在某时某个 t，值 $\tau(t)$ 可能为零时，則中立型如(2.4)之唯一性条件将非常复杂．

現在来叙述解的稳定性．对于不带时滯的微分方程而言，解的稳定性的定义按李雅普諾夫意义可表述如下：

設方程組

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; t), \; i=1, 2, \cdots, n \qquad (2.5)$$

具有显易解 $x_i \equiv 0, i=1, 2, \cdots, n$，亦卽要求

$$f_i(0, 0, \cdots, 0; t) \equiv 0, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

則这組显易解按李雅普諾夫意义称为稳定的，如果滿足下述条件：

对任何給定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对任何的初值 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, t^0(=0)$，只要

$$x_i^0|<\delta,$$

則(2.5)的以 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, t^0)$ 为初值的解

$$x_i=x_i(t), \quad i=1, 2, \cdots, n$$

均滿足条件

$$|x_i(t)| < \varepsilon.$$

此式对任何 $t \geqslant t^0$ 成立.

在上述定义中,如果不一定能有 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 則显易解 $x_i\equiv 0$, $i=1, 2, \cdots, n$ 称为按李雅普諾夫意义不稳定.

在稳定的情况下,如果还有条件

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

則显易解 $x_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 称为按李雅普諾夫意义漸近稳定.

这里所取的任意值 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, 实际上表示初始值受到一个扰动, 当然, 扰动在任何时刻均可能发生,而不仅限于某个特定时刻 $t=t_0$ 才可能发生. 但是,对于不带时滞的微分方程而言,并不需要特别指出某一时刻 t_0, 这是因为对任何 t_0 而言, 如果得到的运动按李雅普諾夫意义是稳定的,則对任何 $\bar{t} > t_0$, 也都可以証明运动按李雅普諾夫意义是稳定的. 这只要注意到微分方程的解对于初值的連續依賴性条件以及解可以在 t 减少的方向継續延长的可能性,便足以証明这点.

但是,对于带时滞的方程而言,一般地解不能在 t 减少的方向継續延长,举一个簡单例子来說明这点.

給定方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t-1),$$

并且給定初始点集 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上之初始函数

$$x(t) = \varphi(t).$$

要将此解向 $t < 0$ 延长,則有

$$x(t-1) = \frac{dx(t)}{dt} = \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$x(t-2) = \frac{dx(t-1)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x(t-n+1) = \frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}, \ 0 \leqslant t \leqslant 1, n = 1, 2, \cdots$$

因此,欲使 $x(t)$ 在 $t \leqslant 0$ 方向延长,便需要 $\varphi(t)$ 有无限多次微分.

解不能在 t 減少的方向任意延长这一事实,使得稳定性对 t_0 的选取也不能任意. 对于在初始点集 E_{t_0} 上之初始扰动函数为稳定的解,有可能对于其他时間 $\bar{t}_0$, 对在初始点集 $E_{\bar{t}_0}$ 上之初始扰动函数是不稳定的.

为了具体說明这种現象,我們举一个例,研究最簡单的方程

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) - u(t - \tau(t)), \quad t \geqslant 0$$

其中 $\tau(t)$ 取为

$$\tau(t) = t(1 - e^{-t}),$$

則当 $t \geqslant 0$ 时,$\tau(t) \geqslant 0$. 这时方程化为

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) - u(te^{-t}), \quad t \geqslant 0.$$

現在我們来証明,对于不同的初始点集,显易解的稳定性質是不相同的.

对初始点集 E_0 而言,滿足条件

$$t \geqslant 0, \quad te^{-t} \leqslant 0$$

的 te^{-t} 的值只有一点,即 $t = 0$. 故 E_0 就是一点 $t = 0$. 对于 E_0 上之扰动而言,这个方程之显易解 $u(t) = 0$ 是稳定的,这是因为如果初始时間是 $t_0 = 0$,則这个方程的通解就是 $u(t) = C$,此地 C 是一个任意常数.

另一方面,如果初始时刻是 $t = t_1 > e^{-1}$,則可以証明,对初始点集 E_{t_1} 而言,經过某种微小扰动,便可使显易解是不稳定的,这是因为这时初始点集是一个孤立点 $t = t_1$ 和一个綫段,这个綫段由同时滿足条件

$$t \geqslant t_1, \quad te^{-t} \leqslant t_1 \quad (t \geqslant 0)$$

之 te^{-t} 所組成,而函数 te^{-t} 之最大值可算得是 e^{-1}. 但已取定 $t_1 > e^{-1}$, 故 t_1 不在这一綫段上. 因此可取初值函数

$$u(t_1) = \delta$$

及

$$u(t) = \frac{\delta}{2} \text{(当 } t \in E_{t_1} \text{ 但 } t \neq t_1 \text{ 时)},$$

这里 δ 可取任意小之正数. 这时方程有特解

$$u(t)=\frac{\delta}{2}\left[e^{(t-t_1)}+1\right],\ \text{当}\ t\geqslant t_1.$$

这样的解当 $t\to+\infty$ 时取值 ∞,从而得到显易解的不稳定性.

因此,我們对于稳定性的定义还需要进一步加强,郎不只要求对某一时刻 $t=t_0$ 之 E_{t_0} 为稳定, 而且要求对所有的 $\bar{t}_0\geqslant t_0$ 之 $E_{\bar{t}_0}$ 均为稳定. 具体定义如下:方程

$$\frac{du_i(t)}{dt}=f_i(t;u_1(t),\cdots,u_n(t);u_1(t-\tau_{1i}(t)),\cdots,$$

$$u_n(t-\tau_{ni}(t))),\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\tau_{ij}(t)\geqslant 0$$

且在满足初始点集 E_{t_0} 上給定的初始函数

$$u_i(t)=\varphi_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

之解(記作)

$$[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

称为稳定的,如果对于任何 $\bar{t}_0\geqslant t_0$ 及任何 $\varepsilon>0$, 可以取 $\delta(\bar{t}_0,\varepsilon)$ 使得对于在初始点集 $E_{\bar{t}_0}$ 上定义的函数組 $\psi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,只要

$$|\psi_i(t)-[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}|<\delta(\bar{t}_0,\varepsilon),\ i=1,2,\cdots,n$$

则由 $\psi_i(t)$ 作为初始函数之解$[u_i(t)]_{\psi_i(t)}$, 当 $t\geqslant\bar{t}_0$ 时,满足不等式

$$|[u_i(t)]_{\psi_i(t)}-[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}|<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,n.$$

如果对某个 $t\geqslant t_0$ 及某个 $\varepsilon>0$, 此种 $\delta(\bar{t}_0,\varepsilon)$ 不存在, 则 $[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}$ 称为不稳定.

如果在稳定的情形中,进一步还有

$$\lim_{t\to\infty}|[u_i(t)]_{\psi_i(t)}-[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}|=0,$$

则 $[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}$ 称为漸近稳定.

最后,我們还要附带指出, 对 n 阶方程而言,初始函数有 $n-1$ 阶微商. 当 n 阶方程化为 n 个一阶方程的方程組时, 初始函数族可以任意,因此也就扩大了这一范围. 两者之間不完全等价,后者稳定时便可导出前者稳定. 实际上不等价的情形只是些特例, 所

以本书中均采取方程組的形式.

§3. 問題的特点及解法的基本思想

对于稳定性問題的解法，一般有直接解法和間接解法两种．前者基本上是直接写出解的形式，并对其稳定性加以研究．这种方法一般导致特征根問題的研究．后者基本上是利用某种閉曲面的存在，来研究动力系統軌綫与这种閉曲面的关系，以判定稳定性．这种方法一般导致李雅普諾夫函数問題的研究．現在結合带时滞系統的特点加以具体化．

直接解法． 研究方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})x_j(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3.1}$$

及方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j(t) + b_{ij}x_j(t-\tau)) \tag{3.2}$$

$$\tau > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

方程組(3.1)的显易解为漸近稳定的充要条件是特征方程

$$D(\lambda) \equiv |a_{ij} + b_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0 \tag{3.3}$$

的所有特征根 λ 的实数部分为負．这个条件可用路斯霍尔維茨条件来判定．这个方程的根共 n 个．

用拉氏变換写出方程組(3.2)的解以后，也有类似的要求．可以証明，方程組(3.2)的显易解为漸近稳定的充要条件是特征方程

$$D(\lambda,\tau) \equiv |a_{ij} + b_{ij}e^{-\lambda\tau} - \delta_{ij}\lambda| = 0 \tag{3.4}$$

的所有特征根 λ 的实数部分是負的．这是一个超越方程，它有无限多个根 λ．直到現在为止，只有当 $n=1$，亦即最簡单的情形：

$$a + be^{-\lambda\tau} - \lambda = 0$$

才对任給的 a, b, τ（实数）有判定公式，并且是超越判定，而不是代数判定．当 $n \geqslant 2$，还沒有見到給出任何公式．因此，这是需要探討的問題．

我們从另一种考虑出发．一般工程技术工作者常常将时滞略

去不計，也得到所要的結果，这是因为 τ 常常是較小的．用数学形式表出，这便是用方程組(3.1)代替(3.2)，只要 $\tau \geqslant 0$ 足够小便可以了．这等于要求証明下面的断言：

設方程(3.3)的所有特征根 λ 之实部为負，要求証明，方程(3.4)的所有特征根 λ 之实部也是負的，并都小于某一負常数，只要 $\tau \geqslant 0$ 并且 τ 足够小．

这个断言并非显然．首先，方程(3.3)是代数方程，只有有限个根，而(3.4)是超越方程，有无限个根．因而两者的根之間不可能一一对应，因之不是一个簡单的微扰問題．其次，τ 足够小也不是一个决定性的理由．例如，取 $\tau < 0$，$|\tau|$ 任意小，均可証明(3.4)有正实部的根，这就是說，(3.2)的显易解当 $\tau < 0$ 时一定是不稳定的．

为解决这个困难，我們的作法可用下面的例子来說明．

考慮方程

$$a + be^{-\lambda\tau} - \lambda = 0, \quad \tau \geqslant 0,$$

研究 λ 的实部为正时根存在的可能性．这时因設

$$\mathrm{Re}(\lambda) > 0,$$

并且 $\tau > 0$，故有

$$|e^{-\lambda\tau}| < 1.$$

从而

$$|\lambda| = |a + be^{-\lambda\tau}| \leqslant |a| + |b|.$$

这就說明，如果有具正实部的特征根 λ，則

$$|\lambda| \leqslant |a| + |b|.$$

这样，在 $R(\lambda) > 0$ 的一側，只要考慮以原点为心、$|a| + |b|$ 为半径的半圓內部．現在利用 τ 可任意小的性質，可以决定，当 τ 足够小时，方程(3.3)及方程(3.4)在此半圓中的根之个数相等．这样便可得到，当(3.3)的根 λ 均具負实部时，(3.4)当 $\tau > 0$ 但足够小时，也有同样性質．也可得到 τ 的估値．同样，当(3.3)有根 λ 具正实部时，則(3.4)当 $\tau > 0$ 但足够小时，也具有同样性質．

这类特点，我們称之为等价性，亦即(3.3)和(3.4)关于稳定性

的性质,在 $\tau \geqslant 0$ 但足够小时是等价的.

在研究这类問題时,我們还遇到另一类要求,即 τ 之大小并非准确地测得,因之要求对任何 $\tau \geqslant 0$ 都稳定. 这种情形称为无条件稳定.

这类問題和上一問題可用同一思想处理,即对任何 $\tau \geqslant 0$, 可得 $|\lambda| \leqslant |a| + |b|$. 但是进一步还需要研究 τ 之影响. 由于 τ 是任意的,不能仅对 τ 充分小时进行研究,而要对所有的 $\tau \geqslant 0$ 进行研究. 事实上,只要对所有的 $\tau \geqslant 0$, 能使方程

$$a + be^{-\lambda\tau} - \lambda = 0$$

的根 λ 不在虚軸 $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ 上即可,即将 $\lambda = iy$ 代入上式,要求对所有的 $\tau \geqslant 0$,

$$a + be^{-iy\tau} - iy \neq 0.$$

注意到 y 可在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 中变化, τ 可在 0 到 $+\infty$ 中变化,并且 y 与 τ 无关. 利用这一特点,便可知 $y\tau$ 与 y 无关. 这样便可将 $-y\tau$ 記作 ω, 由此有

$$(a + b\cos\omega) + (-y + b\sin\omega)i \neq 0,$$

或要求

$$a + b\cos\omega = 0$$

与

$$-y + b\sin\omega = 0$$

不能同时成立,此地 ω 及 y 为实数. 由此两式消去 ω, 便得到

$$y^2 + a^2 - b^2 = 0.$$

这式若无实根,便要求 $b^2 - a^2 < 0$. 此外当 $b^2 - a^2 = 0$ 时, $y = 0$,这时 $y\tau$ 与 y 均为零. 这要特别研究. 当然,当 $\tau = 0$ 时,解

$$a + b = \lambda$$

当 $a + b < 0$ 时才稳定. 最后合并得出无条件稳定之充要条件是

$$a + b < 0, \quad b^2 - a^2 \leqslant 0$$

同时满足. 这里用到的一个特点是:当 $y \neq 0$, τ 及 y 任取时, τy 与 y 无关. 这样,从特征方程实部及虚部分别为零可以将 $-\tau y = \omega$ 和 y 中之一消去, 得到一个代数方程. 将問題化为代数方程求实

根的問題，这对于有数值系数的方程而言，可用斯图姆定理来判定。这样再一次避免了超越方程的問題，而得到代数判定。

这些方法也可用于 τ 很大的情形。

間接解法. 研究方程組(3.1)及方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}x_j(t)+b_{ij}x_j(t-\tau_{ij}(t))\right) \tag{3.5}$$

$$i=1,2,\cdots,n,\quad \tau_{ij}(t)\geqslant 0,$$

这时 $\tau_{ij}(t)$ 不一定是常数。将(3.1)与(3.5)对比，这时可将(3.5)写成

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}(t))-x_j(t))=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t)+\psi_i(t) \tag{3.6}$$

$$i=1,2,\cdots,n.$$

这样，我們便可将 $\psi_i(t)$ 看作一个扰动，也就是方程受到一种特殊的經常性扰动。这时要解决两个問題，一个是方程組(3.1)的李雅普諾夫函数的具体表达式問題，另一个是时滞大小的具体估計問題。

李雅普諾夫函数的存在性是共知的，虽然并不唯一。但是明确地写出表达式的，一般只看到 $n=2$ 的情形。給定方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=ax+by,\\ \frac{dy}{dt}&=cx+dy,\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

其中

$$-(a+d)=p>0,\quad ad-bc=q>0. \tag{3.8}$$

取函数

$$V(x,y)=q(x^2+y^2)+(cx-ay)^2+(dx-by)^2, \tag{3.9}$$

則在条件(3.8)下，$V(x,y)$ 是正定的，而沿(3.7)的积分曲綫

$$\frac{dV(x,y)}{dt}=-pq(x^2+y^2) \tag{3.10}$$

是負定的.

形式(3.9)及(3.10)給出了 $n=2$ 时的一种李雅普諾夫函数及其导函数. 同样的問題需要推广到一般 n 的情形. 本书中給出一种明显的形式.

在解决了上述問題之后，还需要进一步估計时滞的范围. 这里和一般經常扰动下的情况不完全相同，一般情形可假定 $|\psi_i(t)|$ 足够小，而此地則假定

$$\psi_i(t)=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}(t))-x_j(t))$$

有比較复杂的函数形式，只能間接地通过 $|\tau_{ij}(t)|$ 的大小加以控制. 在这里我們基本上用的是反証法来解决困难，順便得出估值.

上述两种方法主要用于稳定的情形. 为了使得研究結果系統完整，对不稳定的情形也都作了研究，只是这时所用的方法常随情况而易，大部分是举出反例，以便得到不稳定的結論.

为使研究工作进行到底，对于临界情况必須解决. 在这方面，第一临界情形的等价性問題基本上是成立的. 对第二临界情形的不等价情形，也举出了反例.

上述各种方法还可广泛的用到相关的問題上去，如大时滞的类型及中立型方程等.

这些問題和方法还有广泛发展的可能.

第二章 預备知識

§1. 李雅普諾夫运动稳定性定理

在这一节里,我們把有关常系数的、綫性的、非綫性的以及在第一第二临界情况下的系統的所有李雅普諾夫的运动稳定性定理叙述出来,不給出这些定理的詳細証明,因为这些証明在很多有关运动稳定性理論的教科书中可以找到. 以下分别就这五种情形来叙述有关的李雅普諾夫运动稳定性定理.

(A) 常系数的綫性系統. 我們研究方程組

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.1}$$

这里 $p_{s\sigma}(s, \sigma = 1, \cdots, n)$ 是常系数.

其特征方程为

$$|p_{s\sigma} - \delta_{s\sigma}\lambda| = 0 \quad (s, \sigma = 1, \cdots, n). \tag{1.2}$$

定理 1. 如果(1.2)所有的根都具有負实部,即

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

則对任何事先給定的齐次式的定号函数 $U(x_1, \cdots, x_n)$, 都存在唯一的同次的定号函数 V,使得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.1)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n) = U,$$

且 V 与 U 的正負号相反.

(B) 駐定的系統. 考慮方程組

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \cdots, x_n) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.3}$$

函数 X_s 定义在区域

$$|x_s| \leqslant H \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.4}$$

内(这里H是常数),其展式的首項次数不低于2,且$X_s(0,\cdots,0)=0$.

定理 2. 如果对于方程(1.3)我們能找到一个正定的函数$v(x_1,\cdots,x_n)$,它对于时間t的全导数由方程(1.3)构成,且常負或恆等于零,則(1.3)的未被扰动运动是稳定的.

定理 3. 如果对方程(1.3)可以找到一个正定的函数$V(x_1,\cdots,x_n)$,它的全导数$\frac{dV}{dt}$是由方程(1.3)构成并且是負定的,即

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\cdots+p_{sn}x_n)\leqslant 0,$$

則(1.3)的未被扰动运动是漸近稳定的.

定理 4. 如果对方程(1.3)有函数$v(x_1,\cdots,x_n)$,它的全导数由方程(1.3)构成且正定,并且在原点任一邻域内,$V(x_1,\cdots,x_n)$都能取正値,則(1.3)的未被扰动运动是不稳定的.

(C) 非綫性的系統. 按照首次近似之稳定系統,我們考虑

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{\sigma=1}^{n}p_{s\sigma}x_\sigma+X_s(x_1,\cdots,x_n)\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{1.5}$$

这里$p_{s\sigma}$是常数,$X_s(x_1,\cdots,x_n)$定义在区域$|x_s|\leqslant H$内,且其展式的首項次数不低于2.

定理 5. 如果特征方程(1.2)的所有的根都有負实部,即$\mathrm{Re}(\lambda_i)<0\ (i=1,2,\cdots,n)$,則方程(1.5)的未被扰动运动是漸近稳定的.

(D) 第一临界情形. 我們考虑方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=X(x,x_1,\cdots,x_n),\\ \frac{dx_s}{dt}&=\sum_{\sigma=1}^{n}p_{s\sigma}x_\sigma+q_sx+X_s(x,x_1,\cdots,x_n)\\ &(s=1,2,\cdots,n),\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

这里$p_{s\sigma}$与q_s是常量,$X_s(x,x_1,\cdots,x_n)$与$X(x,x_1,\cdots,x_n)$是确定在坐标原点邻域内的解析函数,其展式的首項次数不低于2.

又

$$|p_{s\sigma}-\delta_{s\sigma}\lambda|=0 \quad (s,\sigma=1,2,\cdots,n)$$

的所有根 $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,

$$X^{(0)}(x,0,\cdots,0)=gx^m+g_{m+1}x^{m+1}+\cdots,\ g\neq 0, m\geqslant 2,$$

$$X_s^{(0)}(x,0,\cdots,0)=g_s x^{m_s}+g_s^{(m_s+1)}x^{m_s+1}+\cdots,\ g_s\neq 0,$$

且

$$m_s\geqslant m.$$

定理 6. 設 m 是奇数, $g<0$, 則 (1.6) 的未被扰动运动是漸近穩定的.

定理 7. 設 m 是奇数, $g>0$, 則 (1.6) 的未被扰动运动是不穩定的.

定理 8. 設 m 是偶数, $g\neq 0$, 則 (1.6) 的未被扰动运动是不穩定的.

定义. 如果(1.6)除了滿足上述条件外还有性質 $q_s=0$,

$$X^{(0)}(x,0,\cdots,0)\equiv X_s^{(0)}(x,0,\cdots,0)=0\,(s=1,\cdots,n),$$

我們就称(1.6)为奇异情形.

定理 9. 方程 (1.6) 在奇异情形下的未被扰动运动永远是穩定的,但不是漸近穩定的.

(E) 第二临界情形. 我們考虑下列方程組

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=-\lambda y+X(x,y,x_1,x_2,\cdots,x_n),\\
\frac{dy}{dt}&=\lambda x+Y(x,y,x_1,\cdots,x_n),\\
\frac{dx_s}{dt}&=\alpha_s x+\beta_s y+p_{s1}x_1+\cdots+p_{sn}x_n+X_s(x,y,\\
&\qquad x_1,\cdots,x_n)\quad (s=1,2,\cdots,n),
\end{aligned}\right\}\quad(1.7)$$

其中 X, Y, X_s 是 x, y, x_σ 的正則函数,其展式的首項次数不低于 2. α_s, β_s, $p_{s\sigma}$ 均为实常数, $\lambda>0$ 且 $|p_{s\sigma}-\delta_{s\sigma}\chi|=0\,(s,\sigma=1,2,\cdots,n)$ 的所有根

χ_i 都有性質 $R(\chi_i)<0\,(i=1,2,\cdots,n)$.

对方程組(1.7),我們可以找到一个解析变换

$$\left.\begin{aligned} x &= u(x_1, \cdots, x_n) + \xi, \\ y &= v(x_1, \cdots, x_n) + \eta, \end{aligned}\right\} \quad (1.8)$$

其中 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 与 $v(x_1, \cdots, x_n)$ 满足方程

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + \alpha_s u + \beta_s v + \\ &\qquad + X_s) \frac{\partial u}{\partial x_s} = -\lambda v + X, \\ &\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + \alpha_s u + \beta_s v + \\ &\qquad + X_s) \frac{\partial v}{\partial x_s} = \lambda u + Y. \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

然后我們再引进极座标，卽可将方程組(1.7)化成

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= rR, \\ \frac{dx_s}{d\theta} &= q_{s1}x_1 + \cdots + q_{sn}x_n + r(a_s \cos\theta + \\ &\qquad + b_s \sin\theta) + Q_s, \end{aligned}\right\} \quad (1.10)$$

这里

$$|q_{s\sigma} - \chi\delta_{s\sigma}| = 0 \quad (s, \sigma = 1, 2, \cdots, n)$$

的所有根χ_i都具有性質 $\mathrm{Re}(\chi_i) < 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

为了对方程組(1.10)进行分类，我們首先引入記号

$$R^{(0)}(r) = R\,|_{x_1 = \cdots = x_n = 0},$$

$$Q_s^{(0)}(r) = Q_s\,|_{x_1 = \cdots = x_n = 0}.$$

我們可以断言，經过变换可将方程組(1.10)化为下面两种类型之一：

(甲)一般情形

$$a_s = b_s = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

$$R^{(0)}(r) = gr^{m-1} + (r)_m \quad (g \neq 0, \ m \geq 2),$$

$$Q_s^{(0)}(r) = (r)_m \quad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

$(r)_m$ 表示展成 r 的冪級数时其首項次数不低于 m.

(乙)特殊情形

$$a_s = b_s = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n),$$
$$R^{(0)}(r) \equiv 0, \ Q_s^{(0)}(r) \equiv 0 (s = 1, 2, \cdots, n).$$

針对一般情形,方程組(1.10)可化为下列形式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{d\theta} = z\mathbf{Z}, \\ &\frac{dz_s}{d\theta} = q_{s1}z_1 + q_{s2}z_2 + \cdots + q_{sn}z_n + \mathbf{Z}_s \\ &\qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned}\right\} \quad (1.11)$$

这里 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_s$ 是 $z, z_1, \cdots, z_n$ 的正則函数,系数是 θ 的三角多項式。对实 θ 而言, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_s$ 为 $z, z_1, \cdots, z_n$ 的一致正則函数:

$$\mathbf{Z} = (z, z_1, \cdots, z_n)_1 \quad \mathbf{Z}_s = (z, z_1, \cdots, z_n)_2,$$
$$\mathbf{Z}^{(0)}(z) = \mathbf{Z}|_{z_1 = \cdots = z_n = 0} = gz^{m-1} + (z)_m \quad g \neq 0,$$
$$\mathbf{Z}_s^{(0)}(z) = \mathbf{Z}_s|_{z_1 = \cdots = z_n = 0} = (z)_m.$$

定理 10. 当 $g > 0$ 时,(1.11)的未被扰动运动为不稳定.

当 $g < 0$ 时,(1.11)的未被扰动运动为漸近稳定.

針对特殊情形,方程組(1.10)可化为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{d\theta} = z\mathbf{Z}, \\ &\frac{dz_s}{d\theta} = q_{s1}z_1 + \cdots + q_{sn}z_n + \mathbf{Z}_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned}\right\} \quad (1.12)$$

其中 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_s$ 是 $z, z_1, \cdots, z_n$ 的正則函数, 其系数是 θ 的三角多項式:

$$\mathbf{Z} = (z, z_1, \cdots, z_n)_1, \ \mathbf{Z}_s = (z, z_1, \cdots, z_n)_2,$$
$$\mathbf{Z}^{(0)}(z) \equiv \mathbf{Z}_s^{(0)}(z) \equiv 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n).$$

此时我們有下列結論:

定理 11. 在特殊情况下, 方程(1.12)的未被扰动运动永远是稳定的.

§2. 庞特里亚金 (Л. С. Понтрягин) 定理[10]

我們知道在常微分方程解的稳定性理論中, 关于特征方程 $p(z) = 0$ ($p(z)$ 是 z 的多項式) 的根的性状这样一个問題是极其

重要的．如果給了方程組的平衡态之位置及其对应的特征多項式 $p(z)$，則欲使平衡态的位置稳定，其充分必要条件是特征多項式 $p(z)$的所有根都有負实部．这一問題是由于需要分析水輪机轉速調节上的稳定性，而由霍尔維茨（Hurwitz）在十九世紀末解决的．但是我們也知道，不仅对于多項式（要求它的零点），而且对于超越函数也要求它的零点有負实部．后一問題已由庞特里亚金解决．他对形如

$$H(z) = h(z, e^z)$$

的超越函数（这里 $h(z, t)$ 是 z，t 两个变元的多項式）的全部零点指出了它們有負实部的充要条件．为了便于今后的討論，我們用 r 記多項式 $h(z,t)$ 关于 z 的次数，用 s 記多項式 $h(z,t)$ 关于 t 的次数．我們称形如 $az^r t^s$ 的項为主項．庞特里亚金主要解决了下列两个問題，即

(i) 如果多項式 $h(z, t)$ 沒有主項，則函数

$$H(z) = h(z, e^z)$$

必有无限个零点，且这些零点有任意大的正实部．

(ii) 如果多項式有主項，为了解决前面提出的問題，庞特里亚金指出：必須研究函数 $H(z) = h(z, e^z)$ 在虛軸上的性状，也就是在 $z = yi$ 上的性状，这里 y 是实变元．显見函数 $H(yi)$ 此时可分解成实部与虛部，即

$$H(yi) = F(y) + iG(y),$$

其中

$$F(y) = f(y, \cos y, \sin y),$$
$$G(y) = g(y, \cos y, \sin y),$$

且 $f(y, u, v)$ 与 $g(y, u, v)$ 是多項式．庞特里亚金断定，要使函数 $H(z)$ 所有的根都有負实部，必要且充分条件是使函数 $F(y)$ 与 $G(y)$ 的根都是实的，而且在这当中，至少对同一个 y 值我們有不等式

$$G'(y)F(y) - F'(y)G(y) > 0$$

（注意函数 $F(y)$的特点，它是 y，$\sin y$，$\cos y$ 的多項式）．庞特里亚

金接着又指出,关于形如 $F(z)$ 的函数,它的全部根都是实的这样一个問題,可以按照下列两个原則去解决:

1)要使函数 $F(z)$的所有根都是实的,必要与充分条件是从充分大的 k 开始,函数 $F(y)$在区間

$$-2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi$$

上有 $4sk+r$ 个根,这里所有的根都是实的.

2)后一个原则,完全是类似的对应于多項式情形的原則,就是从充分大的数开始,保証沒有复根,而只有实根.

下面我們詳細叙述庞特里亚金有关超越函数的全部成果,并加以仔細的論証.

(一)在缺少主要項的情形下,函数 $H(z, e^z)$ 的零点.

設 $h(z, t)$ 是两个变量 z 与 t 的具有实的或复的常系数之多項式

$$h(z, t)=\sum_{mn} a_{mn} z^m t^n. \tag{2.1}$$

当 $a_{rs} \neq 0$ 且指数 r 与 s 同时取它們的极大值时,我們称項 $a_{rs}z^rt^s$ 为多項式(2.1)的主要項,也即是說,若在(2.1)中取出任何另外的一项 $a_{mn}z^mt^n$,则 $a_{mn} \neq 0$ 且有 (i) $r>m$, $s>n$; (ii) $r=m$, $s>n$; (iii) $r>m$, $s=n$ 中之一. 显見并不是所有的多項式都具有主項.

定理 1. 在多項式(2.1)缺主要項的情况下,函数

$$H(z)=h(z, e^z) \tag{2.2}$$

必定有无穷多个具有任意大正实部的零点集合.

証. 首先就最簡单的情形来举例説明定理的全貌. 不妨我們就 $h(z, t)=t-z$ (此即沒有主項的、最簡单的)的情形来討論,因此我們有

$$e^z-z=0.$$

以 $z=x+iy$ 代入,则有

$$e^x(\cos y+i\sin y)-(x+iy)=0,$$

所以

$$e^x\cos y=x, \quad e^x\sin y=y. \tag{2.3}$$

当 x 与 y 为很大的正数时,我們来求(2.3)的近似解. 由

$$\cos y = e^{-x}x,$$

故知 $y \sim 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ （記号～表示近似）.

由(2.3)的第二个关系式知， $e^x \sim 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，所以

$$x \sim \ln\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

故方程 $h(z, t) = t - z = 0$，所要求的解就是

$$z = \ln\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \zeta,$$

这里当 $\frac{1}{k} \to 0$，即 $k \to \infty$ 时， $\zeta \to 0$.

因此类似的对一般的

$$H(z) = h(z, e^z) = 0,$$

我們要求如下形式的解

$$z = \alpha \ln 2k\pi + 2k\pi i + \ln\theta + \zeta, \qquad (2.4)$$

其中 α 为正的有理数，它依所給的(2.1)的形式来选取；$\theta \neq 0$ 且为复数，其选取方式也和方程(2.1)的形式有关．最后的 ζ 虽未知，但当 $\frac{1}{k} \to 0$，它亦趋于 0．按照如上的分析，由(2.4)我們有

$$e^z = (2k\pi)^\alpha \theta e^\zeta,$$

$$z = i2k\pi(1 + \delta_1(\xi)), \qquad (2.5)$$

这里

$$\delta_1(\xi) = \frac{\alpha \ln 2k\pi + \ln\theta + \zeta}{2k\pi i}.$$

故当 $\frac{1}{k} \to 0$ 时，$\delta_1(\zeta) \xrightarrow{\text{一致}} 0$，且 $\delta_1(\zeta)$ 为 ζ 之解析函数．代入 $H(z) = 0$ 中，我們就有

$$H(z) = \sum_{m,n} a_{mn} z^m (e^z)^n = \sum a_{mn}[i2k\pi(1 + \delta_1(\zeta))]^m \times$$

$$\times [(2k\pi)^\alpha \theta e^\zeta]^n = \sum_{m,n} (2k\pi)^{m+\alpha n} a_{mn} i^m \theta^n e^{n\zeta} \times$$

$$\times (1 + \delta_1\zeta)^m. \qquad (2.6)$$

将(2.6)於右端按$(2k\pi)$之降幂排列，首項次数以 β 記之（当 $a_{mn} \neq$

0), 则(2.6)可以改写成

$$H(z) = \sum_{\substack{n \\ m+\alpha n=\beta}} (2k\pi)^{\beta} a_{mn} i^{m} \theta^{n} e^{n\zeta} + (2k\pi)^{\beta}\delta_2(\zeta) =$$

$$= \sum_{\substack{n \\ m+\alpha n=\beta}} (2k\pi)^{\beta} b_n \theta^{n} e^{n\zeta} + (2k\pi)^{\beta}\delta_2(\zeta),$$

其中 $\delta_2(\zeta)$ 为 ζ 之解析函数且当 $|\zeta| \leqslant 1, k \to \infty$ 时,一致收敛于零. 由于 β 是可以取到的最大值,故至少有一个 n, 使得对 (m, n) 既有 $m + \alpha n = \beta$, 同时又有 $a_{mn} \neq 0$.

以下我們要証明的是:(2.1)中如无主項,則适当选取 α,必定至少有两个不同的 n, 合于条件 $\beta = \alpha n + m$. 从 (m, n) 平面的直綫图(2.1)中,很自然的可以看出这一点.

于是方程

$$\sum_{n} b_n \theta^{n} = 0 \qquad (2.7)$$

至少有一个非零根. 以下卽取此根为 θ, 代入 $H(z)$, $H(z) = 0$, 卽

$$\sum_{n} b_n \theta^{n} e^{n\zeta} + \delta_2(\zeta) = 0. \qquad (2.8)$$

图 2.1

$H(z)=0$ 的每一项都用 $(2k\pi)^{\beta}$ 除之, 則等式(2.8)的左方当 $k \to +\infty$ 时一致收敛于函数 $\sum_{n} b_n \theta^{n} e^{n\zeta}$. 但另一方面,由 $\sum_{n} b_n \theta^{n} e^{n\zeta} = 0$, 再注意到方程(2.7),我們卽可知它有显然的根 $\zeta = 0$. 根据一致收斂性,当 k 很大时,(2.8)有 ζ_k,并且当 $k \to \infty$ 时 $\zeta_k \to 0$,故方程 $H(z) = 0$ 有解

$$z = \ln 2k\pi + 2k\pi i + \ln\theta + \zeta_k. \qquad (2.9)$$

由某个大 k 开始,注意到当 $\frac{1}{k} \to 0$ 时 $\zeta_k \xrightarrow{\text{一致}} 0$, 再注意到 α, θ 与 k 无关,則当 k 相当大时,这个解显然有正实部分. 定理証到这里还沒有結束,原因是如何适当的选取 α, 才可保証至少一定

存在两个不同的 n，使 $m+\alpha n=\beta$ 成立及 $a_{mn}\neq 0$. 关于这一点，前面未仔細交待. 因此，只要証明这一事实成立，則定理証毕.

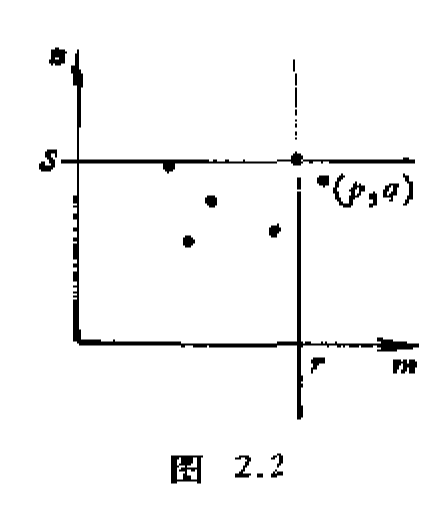


图 2.2

我們取

$$s=\max_{a_{mn}\neq 0}\{n\},$$

$$r=\max_{a_{ms}\neq 0}\{m\},$$

則由于无主項，必存在 (p,q): $p>r$, $q<s$, 使 $a_{pq}\neq 0$. 在方程(2.1)中以 z^{α} $(\alpha>0)$ 代 t，則有

$$h(z,z^{\alpha})=\sum_{m,n}a_{mn}z^{m-\alpha n}. \qquad (2.10)$$

多項式(2.10)也有首項，当 α 很大时，(2.10)的首項为 $a_{rs}z^{r+\alpha s}$; 当 α 接近于零时，它不会再是首項了，因为至少項 $a_{pq}z^{p+\alpha q}$ 要排在項 $a_{rs}z^{r+\alpha s}$ 的前面(这是因为 $p>r$). 故当 α 由 $+\infty$ 变到零时，則有这样的 α，使得至少有两个相等，即 $r+\alpha s=m+\alpha n=\beta$. 我們就取此 α，显見 α 是有理数，因为它滿足关系式

$$r+\alpha s=m+\alpha n.$$

定理 1 証毕.

(二)函数 $f(z,\cos z,\sin z)$ 的零点.

設 $f(z,u,v)$ 为 z,u,v 之实常系数多項式，則

$$f(z,\cos z,\sin z)=F(z) \qquad (2.11)$$

是变量 z 的整超越函数，并且在变量 z 取实数值时，函数 $F(z)$ 就取实数值. 我們来研究 $F(z)$ 只有实根之充要条件. 改写 (2.11) 成下列形式:

$$f(z,u,v)=\sum_{m,n}z^{m}\varphi_m^{(n)}(u,v), \qquad (2.12)$$

这里 $\varphi_m^{(n)}(u,v)$ 是 u,v 的 n 次齐次式. 因为在后面我們将要設 $u=\cos z$, $v=\sin z$，故可假定 $\varphi_m^{(n)}(u,v)$ 不能被 u^2-v^2 除尽. 由于 $|u|\leqslant 1$, $|v|\leqslant 1$ 及 $u^2+v^2=\cos^2 z+\sin^2 z=1$，由 $u^2+v^2=0$ 可推出当 $u=1$ 时 $v=\pm i$. 这样我們就可把对 (2.12) 中的 $\varphi_m^{(n)}(uv)$ 所作的假定改写成下列形式，即 $\varphi_m^{(n)}(u,v)$ 满足条件

$$\varphi_m^{(n)}(1, \pm i) \neq 0 \tag{2.13}$$

是对(2.12)中所有如此的項而言的。

記(2.12)中之首項为 $z^r\varphi_r^{(s)}(u, v)$，此地 r, s 均为最大. 利用(一)中所得之結論，我們可以証得下列結論.

定理 2. 如果多項式(2.12)沒有主項，则函数 $F(z)$ 必有无限多个非实的根。

这个定理的詳細証明，放在下一个定理的証明之后.

对(2.12)存在首項之情形，将首項取出，則有

$$f(z, u, v) = z^r\varphi_*^{(s)}(u, v) + \sum_{\substack{m<r \\ n\leqslant s}} z^m\varphi_m^n(u, v), \tag{2.14}$$

此地 $\varphi_*^{(s)}(u, v)$ 已不是 u, v 之 s 次齐次多項式. 其原因就是 $\varphi_*^{(s)}(u,v)$ 中不仅含有 u, v 的齐次式的最高項，而且亦可能含 u, v 的齐次式較低次項. 因此 $\varphi_*^{(s)}(u, v)$ 可以写成

$$\varphi_*^{(s)}(u, v) = \sum_{n\leqslant s} \varphi_r^{(n)}(u,v), \tag{2.15}$$

此时函数

$$\Phi_*^{(s)}(z) = \varphi_*^{(s)}(\cos z, \sin z)$$

显然有周期 2π. 下面我們来証明，在 $a \leqslant x < 2\pi+a$ $(z = x+iy)$ 中函数 $\Phi_*^{(s)}(z)$ 只有有限个根，即有 $2s$ 个根. 如果我們証明了这个結論，立即可知必存在无限点集 $\{\alpha\}$, $\alpha = \varepsilon$, 使对任何 y 都有

$$\Phi_*^{(s)}(\varepsilon + iy) \neq 0.$$

在較多情况下 ε 可取成 0 .

定理 3. 設 $f(z, u, v)$ 的首項为 $z^r\varphi_r^{(s)}(u, v)$, 又設 ε 使

$$\Phi_*^{(s)}(\varepsilon + iy) \neq 0$$

对所有实的 y 都成立，則在带形

$$-2k\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi + \varepsilon$$

中(这里 $z = x + iy$), $F(z)$ 由某个大 k 起将有 $4sk + r$ 个根. 因此，为了要使 $F(z)$ 只有实根，其充要条件是由某个大 k 起，在

$$-2k\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi + \varepsilon$$

中有 $4sk + r$ 个实根.

証. 先証在带形 $a \leqslant x < 2\pi + a$ $(z = x + iy)$ 中函数 $\Phi_*^{(s)}(z)$ 有 $2s$ 个根。

設 $u = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $v = \frac{1}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, (2.16)

則当 $t = e^{iz}$ 时有

$$u = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} \cdot 2\cos z = \cos z,$$

$$v = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sin z.$$

再將(2.16)代入 $\varphi_*^{(s)}(u, v)$, 得 $\varphi_*^{(s)}(t)$为 t 的有限級数$\left(t \text{ 及 } \frac{1}{t}\right)$. 对变数 t 而言,最高正項 s 次之系数为 $\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)$(这只要注意(2.15)与 $\frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$ 即可). 对 t 之最低負次冪項, $-s$ 次之系数为 $\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)$(其道理同上). 由(2.13)知, $\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right) \neq 0$, $\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) \neq 0$, 所以 $\varphi_*^{(s)}(t) = 0$ 恰好有 $2s$ 个根(因为 $\varphi_*^{(s)}(t)$的最高項之冪为 $2s$, 且該項之系数不为零)且均不为零(因为 $\varphi_*^{(s)}(t)$ 之常数項亦不为零). 我們通过

$$t_1, t_2, \cdots, t_{2s}$$

来記这 $2s$ 个根. 对方程

$$\Phi_*^{(s)}(z) = 0 \tag{2.17}$$

来說,现在只要解 $e^{iz} = t_j$. 一个固定的解在 $a \leqslant x < 2\pi + a$ 中恰有一个根;如 t_j 各不相等,則(2.17)在此带中恰好有 $2s$ 个根. 如有重根 t_j, 則方程(2.17)亦有重根.

下面我們再来研究 $|y|$ 很大时 $(z = x + iy)$ $\Phi_m^{(n)}(z) = \varphi_m^{(n)}(\cos z, \sin z)$ 的情形, 并注意 $e^{iz} = e^{-y+ix}$, $e^{-iz} = e^{y-ix}$, $(e^{iz})^n = e^{-ny+inx}$, $(e^{-iz})^n = e^{ny-inx}$. 則我們就有

$$\left.\begin{aligned} \Phi_m^{(n)}(x + iy) &= e^{ny-nix}\left(\varphi_m^{(n)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) + \delta_1\right), \\ \Phi_m^{(n)}(x + iy) &= e^{-ny+nix}\left(\varphi_m^{(n)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right) + \delta_2\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

这里当 $y \to +\infty$ 时，$\delta_1 \xrightarrow{\text{一致}} 0$； 当 $y \to -\infty$ 时，$\delta_2 \xrightarrow{\text{一致}} 0$. 同时，我們还要注意

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

以及当 $y \to \infty$ 或 $y \to -\infty$ 时，e^y 及 e^{-y} 的变化情形. 注意了这些事实，則不难看出关系式(2.18)的正确性. 由(2.18)立即可得非齐次函数 $\Phi_*^{(s)}(z)$ 有下述性質：

$$\left.\begin{aligned} \Phi_*^{(s)}(x+iy) &= e^{sy-six}\left(\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) + \delta_3\right), \\ \Phi_*^{(s)}(x+iy) &= e^{-sy+six}\left(\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right) + \delta_4\right), \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

其中当 $y \to +\infty$ 时，$\delta_3 \xrightarrow{\text{一致}} 0$；当 $y \to -\infty$ 时，$\delta_4 \xrightarrow{\text{一致}} 0$.

取 $b' > 0$，使得 $\Phi_*^{(s)}(x+iy) \neq 0$. 当 $|y| > b'$（此不等式可以成立，因为 $\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) \neq 0$，$\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right) \neq 0$）. 且 b' 很大时，δ_3 与 δ_4 都很小. 因此，它們就可分别被数 $\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)$ 与 $\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)$所控制.

由(2.18)与(2.19)即知，当 $|y| > b'$ 时，

$$\left|\frac{\Phi_m^{(n)}(x+iy)}{\Phi_*^{(s)}(x+iy)}\right| < c_1, \quad (s > n) \qquad (2.20)$$

其中 c_1 是常数，它与多项式(2.12)及 b' 有关. 同理，由(2.18)与(2.19)我們有

$$\left|\frac{\Phi_m^{(n)}(\pm 2k\pi + \varepsilon + iy)}{\Phi_*^{(s)}(\pm 2k\pi + \varepsilon + iy)}\right| < c_2, \qquad (2.21)$$

这里 c_2 是与(2.12)及 ε 有关的某个常数. 我們在方形

$$P_{kb}\left\{\begin{aligned} -2k\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi + \varepsilon \\ -b \leqslant y \leqslant b \end{aligned}\right\}$$

中估計 $F(z)$ 的零点个数，$F(z)$可写成下列形式：

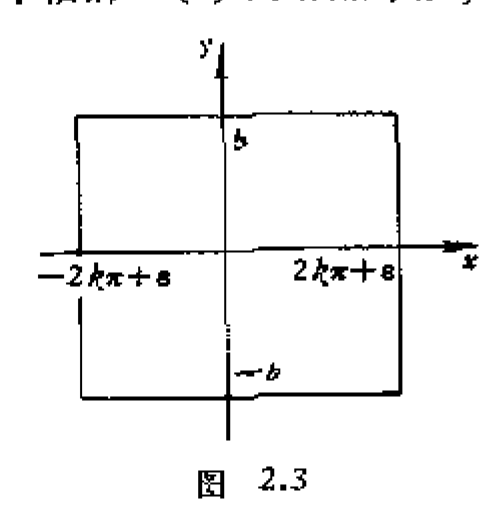


图 2.3

$$F(z) = z^r \Phi_*^{(s)}(z) \times$$
$$\times \left(1 + \sum_{\substack{m<r\\ n\leqslant s}} z^{m-r} \frac{\Phi_m^{(n)}(z)}{\Phi_*^{(s)}(z)}\right), \quad (2.22)$$

这里 z^{m-r} 之冪 $m-r<0$. 故由 (2.20) 及 (2.21)，当 b 与 k 相当大时有

$$F(z) = z^r \Phi_*^{(s)}(z)(1+\delta_5), \quad (2.23)$$

$$\delta_5 \to 0, \text{当 } k \to \infty, b \to \infty.$$

因此 $F(z)$ 及 $z^r\Phi_*^{(s)}(z)$ 在 p_{kb} 中之根其数目相等. 我們再将 k 固定于某个大的数，将 $b\to\infty$，則 $F(z)$ 与 $z^r\Phi^{(s)}(z)$ 在

$$-2k\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2k\pi + \varepsilon$$

中之零点个数相等(这一点将在下面証明). 而函数 $z^r\Phi^{(s)}(z)$显然有 $4sk+r$ 个零点(因为在前面已証明过函数 $\Phi_*^{(s)}(z)$ 在区間 $a \leqslant x < 2\pi + a$ 中只有 $2s$ 个零点). 关于 $F(z)$ 与 $z^r\Phi^{(s)}(z)$ 的零点个数相同这事实，我們只要补証下面一点即可，卽如果函数 $g(z)$ 在区域 p 內及其上无奇点，在 p 上亦无零点，$g^*(z) = g(z)(1 + \delta(z))$，$|\delta(z)| < 1$，則作

$$g(z, \tau) = g(z)(1 + \tau\delta(z)),$$

当 τ 由 0 变到 1 时，$g(z,\tau)$在 p 上不为零. 故 $g^*(z)$与 $g(z)$在 p 內之零点个数相等. 实际上，这就是儒歇定理. 至此，定理 3 的証明全部結束. 下面我們証明定理 2.

設 $f(z, u, v)$ 无首項：

$$f(z, u, v) = \sum_{m,n} z^m \varphi_m^{(n)}(u, v). \quad (2.12)$$

当 $n = s$ 时，記

$$s = \max n, \ r = \max m, \ (\text{在 } (2.12) \text{ 中})$$

則 (2.12) 中出現 $z^r\varphi_r^{(s)}(u,v)$，但又无首項. 故还要存在一項 $z^p\varphi_p^{(q)}(u,v)$ 使$p > r$ 及 $q < s$.

将

$$u=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ v=\frac{1}{2i}\left(t-\frac{1}{t}\right) \tag{2.16}$$

代入,并以 t^s 乘之,得 $h(z, t)$,其中必有一項 $z^r t^{2s}\varphi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)$,且此項的 t 的冪最高,又因这 t 的次項中 z 的冪为最高,而多項式 $h(z, t)$ 还有另外一項 $z^p t^{q+s}\varphi_p^{(q)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)$, 且 $p>r$, $q+s<2s$, 故 $h(z, t)$ 无首項. 所以 $h(-iz, t)$ 也无首項. 由定理1知, $h(-iz, e^z)=0$有根,且具有正实部分. 由此即得方程

$$h(z, e^{iz})=0$$

的虚部不为0的根. 定理2証毕.

定理2与定理3給出了函数$f(z, \cos z, \sin z)$只有实根之充要条件,当 $f(z, u, v)$ 无主項时,立刻可知 $f(z, \cos z, \sin z)$ 有无限多个非实的根. 当有主項时,下面的定理可以告訴我們,函数$f(z, u, v)$是否有无限多个非实的根.

定理 4.

$$f(z, u, v)=z^r\varphi_*^{(s)}(u, v)+\sum_{\substack{m<r\\ n\leqslant s}} z^m\varphi_m^{(n)}(u, v) \tag{2.14}$$

有主項

$$\varphi_*^{(s)}(u, v)=\sum_{n\leqslant s}\varphi_r^{(n)}(u, v). \tag{2.15}$$

1) 如果

$$\Phi_*^{(s)}(z)=\varphi_*^{(s)}(\cos z, \sin z)$$

有非实的根,則函数 $F(z)=f(z, \cos z, \sin z)$ 有无限多个非实的根.

2) 如果 $\Phi_*^{(s)}(z)$ 只有实根,而且是单根,則函数 $F(z)$有不多于有限个非实的根.

証. 我們用方程

$$\Phi_*^{(s)}(z)+\sum_{\substack{m<r\\ n\leqslant s}} z^{m-r}\Phi_m^{(n)}(z)=0 \tag{2.24}$$

代替 $F(z)=0$.

設 $\Phi_*^{(t)}(c)=0$, c 为非实数，我們求(2.24)的形如 $z=2k\pi+c+\zeta$ 的解,这里 k 很大, ζ 很小. 方程(2.24)可写成

$$\Phi_*^{(t)}(c+\zeta)+\delta_{(\zeta)}=0, \tag{2.25}$$

$\delta(\zeta)$为 ζ 之解析函数. 又当 $|\zeta|\leqslant 1$ 时,

$$\delta(\zeta)\xrightarrow{\text{一致}}0 \quad (k\to\infty).$$

但因方程(2.25)的左方,当 $k\to\infty$时,一致收斂于 $\Phi_*^{(t)}(c+\zeta)$, 而方程 $\Phi_*^{(t)}(c+\zeta)=0$. 有显然的解 $\zeta=0$,故方程(2.25)当 $k\to\infty$ 时有解 $\zeta_k\to 0$. 由此即得定理的第一个結論，即因 c 非实, 故解 $z=2k\pi+c+\zeta_k$ 当 k 很大时也非实.

如果方程 $\Phi_*^{(t)}(z)=0$ 的所有根都是实的, 又无重根,则在

$$2k\pi+\varepsilon\leqslant x\leqslant 2(k+1)\pi+\varepsilon$$

中,曲綫 $w=\Phi_*^{(t)}(x)$ 穿过 $w=0$ 軸的 $2s$ 个不同的点. 曲綫

$$w=\Phi_*^{(t)}(x)+\sum_{\substack{m<r\\ n\leqslant s}}x^{n-r}\Phi_m^{(n)}(x) \tag{2.26}$$

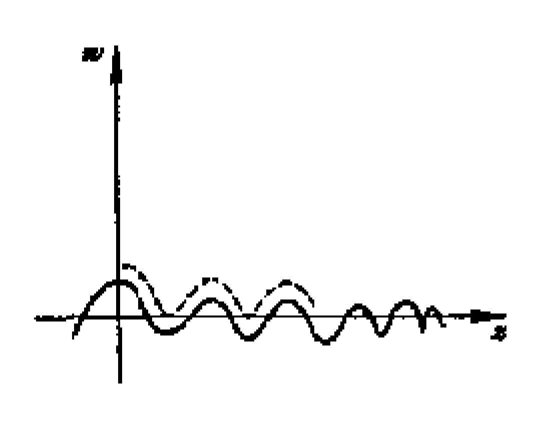


图 2.4

当 k 相当大时与 $w=\Phi_*^{(t)}(x)$ 相差不多，故当 k 相当大时，(2.26) 与 $w=0$ 在

$$2k\pi+\varepsilon\leqslant x\leqslant 2(k+1)\pi+\varepsilon$$

上相交于 $2s$ 个点. 因此 $F(z)$ 在

$$-2k\pi+\varepsilon\leqslant x\leqslant 2k\pi+\varepsilon$$

中的实根为 $4sk+r'$ 个. 当 k 足够大时,由定理 3 知, $F(z)$ 的非实根的个数为 $r-r'$. 定理証毕.

欲在上区間中研究函数 $\Phi_*^{(t)}(z)$ 的根,亦即要解某个多項式之根. 为此,将 $\cos z$, $\sin z$ 用 $\tan\frac{z}{2}$ 来表示:

$$\cos z=\frac{1-\tan^2\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}},\quad \sin z=\frac{2\tan\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}.$$

其次，取 $\tan\frac{z}{2}$ 为新未知数 t，在多项式 $\varphi_*^{(s)}(u, v)$ 中命

$$u=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad v=\frac{2t}{1+t^2},$$

再乘以 $(1+t^2)^s$，所得的多项式以 $\varphi^{(s)}(t)$ 記之，显見此多項式之最高次为 $2s$。在 $\varphi^{(s)}(t)$ 中若 t^{2s} 項不出现，这就意味着 $\varphi^{(s)}(t)$ 有解 $t=\infty$。关于这一点，我們只要把 u, v 的表示式实际代入 $\varphi^{(s)}(u, v)$，經簡化就有

$$\varphi^{(s)}(t)=\frac{t\text{ 之最高次为 }2s-1\text{ 項}+\cdots}{(1+t^2)^s}.$$

因此有 $\varphi^{(s)}(\infty)=0$，即 $\tan\frac{z}{2}=\infty$，所以 $\frac{z}{2}=\frac{\pi}{2}, z=\pi$。这說明了多項式 $\Phi_*^{(s)}(z)$ 有解 $z=\pi$，其重次等于 $\varphi^{(s)}(t)$ 的最高次与 $2s$ 的差数。$\varphi^{(s)}(t)$ 的任何有限根 t，对应于 $\Phi_*^{(s)}(z)$ 的根 $\tan\frac{z}{2}=t$，其中实根对应于实根，非实根对应于非实根。特别，只有 $\tan\frac{z}{2}=$ $=\pm i$ 无解。但由(2.13)知，$\varphi^{(s)}(t)$ 无 $\pm i$ 之根，实际上我們有

$$\varphi^{(s)}(t)=\varphi_r^{(s)}(1-t^2, 2t)+\sum_{n<s}\varphi_r^{(n)}(1-t^2, 2t)(1+t^2)^{s-n}. \quad (2.27)$$

将 $t=\pm i$ 代入即得

$$\varphi^{(s)}(\pm i)=\varphi_r^{(s)}(2, \pm i)\neq 0.$$

（三）函数 $h(z, e^z)$ 在有主項时的零点

$$h(z, t)=\sum_{m,n}a_{mn}z^m t^n, \quad (2.28)$$

又 $a_{rs}z^r t^s$ 为(2.28)的首項。在(2.28)中将 z^r 之系数取出，置

$$h(z, t)=z^r\chi_*^{(s)}(t)+\sum_{m<r, n\leqslant s}a_{mn}z^m t^n. \quad (2.29)$$

函数 $\chi_*^{(s)}(e^z)$ 显然是 z 的以 $2\pi i$ 为周期的函数。又在 $b\leqslant y<b+2\pi$ 中 $(z=x+iy)$ 有不多于 s 个根，因此存在实数 $c>0$，使得对任何 x 有

$$\chi_*^{(s)}(e^{x-ic})\neq 0. \quad (2.30)$$

定理 5. 由上面的条件，以 N_k 記 $H(z)=h(z, e^z)$ 在

$$-2k\pi+\varepsilon \leqslant y \leqslant 2k\pi+\varepsilon \quad (x>0,\ z=x+iy)$$

中的根的个数，設 $H(z)$ 在虛軸上无根，即 $H(iy)\neq 0$. 当 y 由 $-2k\pi+\varepsilon$ 变到 $2k\pi+\varepsilon$ 时，向量 $\mathbf{w}=H(iy)$ 所轉的角度以 V_k 記之，則

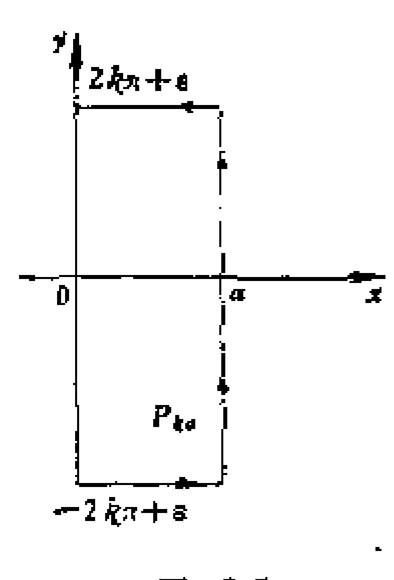


图 2.5

$$V_k=2\pi\left(2sk-N_k+\frac{1}{2}r\right)+\delta_k,$$

此地当 $k\to+\infty$ 时 $\delta_k\to 0$.

証. 考虑长方形 p_{ka}:

$$0\leqslant x\leqslant a,$$

$$-2k\pi+\varepsilon\leqslant y\leqslant 2k\pi+\varepsilon.$$

我們来估計 $w=H(z)$. 当 z 在其三个边上(除掉 $x=0$, 即 y 軸外)轉时，w 之轉数由(2.29)及(2.30)即得

$$H(z)=z^r\chi_*^{(r)}(e^z)\ (1+\delta_1(z)),$$

这里当 $k\to\infty$, $a\to\infty$ 时，在矩形的三个边(除去 y 軸外)上 $\delta_1(z)\rightrightarrows 0$. 故 $H(z)$ 与 $z^r\chi_*^{(r)}(e^z)$ 的轉数之差为 η, 且当 $k\to\infty$, $a\to\infty$ 时，$\eta\to 0$;

$z^r\chi_*^{(r)}(e^z)$ 的轉数等于 z 的轉数加 $\chi_*^{(r)}(e^z)$ 的轉数，显然 z^r 的轉数是 $r\pi$ (在三条边上)，而 $\chi_*^{(r)}(e^z)$ 为周期的，所以在下边与上边的轉数互相抵消了. 而在右边上的轉数 $\chi_*^{(r)}(e^z)$ 与 $a_{rs}e^{sz}$ 的轉数差不多，后者显然为 $4k\pi s$, 合并得到函数 $H(z)$ 在三边上的轉数与 $4\pi sk+\pi r$ 相差不多. 当 z 在 p_{ka} 上轉动时，$H(z)$ 在 p_{ka} 中的根数等于向量 $\mathbf{w}=H(z)$ 的完全繞动数，由此直接得到定理 5.

定理 5 表明研究 $H(z)$ 在虛軸上的情形是很重要的，$H(z)$ 在虛軸上可表示成

$$H(iy)=F(y)+iG(y) \tag{2.31}$$
$$=f(y,\cos y,\sin y)+ig(y,\cos y,\sin y),$$

$f(y,u,v)$ 及 $g(y,u,v)$ 为多項式. 进一步考虑 $h(z,t)$ 与 $f(y,u,v)$, $g(y,u,v)$ 之間的关系. 令

$$\alpha^{(n)}(u, v) + i\beta^{(n)}(u, v) = (u + iv)^n,$$

此地 $\alpha^{(n)}(u, v)$ 与 $\beta^{(n)}(u, v)$ 是实系数多項式,則有

$$\left.\begin{aligned}\alpha^{(n)}(u, v) &= \frac{1}{2}((u + iv)^n + (u - iv)^n),\\ \beta^{(n)}(u, v) &= \frac{1}{2i}((u + iv)^n - (u - iv)^n).\end{aligned}\right\} \qquad (2.32)$$

現証明多項式

$$a\alpha^{(n)}(u, v) + b\beta^{(n)}(u, v) = \gamma^{(n)}(u, v)$$

当 a, b 均为实数,且不同时为零时,滿足条件

$$\gamma^{(n)}(1, \pm i) \neq 0. \qquad (2.33)$$

因而由(2.32)得到

$$\gamma^{(n)}(1, \pm i) = a\alpha^{(n)}(1, \pm i) + b\beta^{(n)}(1, \pm i) =$$

$$= \frac{a}{2}[(1 \pm i^2)^n + (1 \mp i^2)^n] + \frac{b}{2i}[(1 \pm i^2)^n - (1 \mp i^2)^n] =$$

$$= \frac{a + ib}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}(a + ib).$$

同时也可直接看出

$$H(iy) = h(iy, e^{iy}) = f(y, u, v) + ig(y, u, v) =$$

$$= \sum_{m, n} (a'_{mn} + ia''_{mn}) i^m y^m (\alpha^{(n)}(u, v) + i\beta^{(n)}(u, v)). \qquad (2.34)$$

由 (2.28) 知道 $a'_{mn} + ia''_{mn} = a_{mn}$, 其中 a'_{mn}, a''_{mn} 为实数. 如果置

$$\left.\begin{aligned}f(y, u, v) &= \sum_{m, n} y^m \varphi_m^{(n)}(u, v),\\ g(y, u, v) &= \sum_{m, n} y^m \psi_m^{(n)}(u, v),\end{aligned}\right\} \qquad (2.35)$$

則由(2.34)得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi_m^{(n)}(u, v) &= \pm(a'_{mn}\alpha^{(n)}(u, v) - a''_{mn}\beta^{(n)}(u, v)),\\ \psi_m^{(n)}(u, v) &= \pm(a''_{mn}\alpha^{(n)}(u, v) + a'_{mn}\beta^{(n)}(u, v)),\end{aligned}\right\} \qquad (2.36)$$

这里符号与阶数由 m 被 4 除的余数而定. 設 λ, μ 为两个不同时为零的实数,則

$$\lambda f(y, u, v)+\mu g(y, u, v)=$$
$$=\sum_{m, n} y^{m}\left(\lambda \varphi_{m}^{(n)}(u, v)+\mu \psi_{m}^{(n)}(u, v)\right).$$

由(2.36)得

$$\lambda \varphi_{m}^{(n)}(u, v)+\mu \psi_{m}^{(n)}(u, v)=a \alpha^{(n)}(u, v)+b \beta^{(n)}(u, v).$$

因

$$\left|\begin{array}{cc} a_{mn}' & -a_{mn}'' \\ a_{mn}'' & a_{mn}' \end{array}\right|=\left(a_{mn}'\right)^{2}+\left(a_{mn}''\right)^{2}=|a_{mn}|^{2},$$

故当 $a_{mn} \neq 0$ 时，有 $|a_{mn}|^2 \neq 0$.

现在如果 $a_{rs}z^r t^s$ 为多项式 $h(z, u, v)$ 的首项，则 $\lambda f(y, u, v)+\mu g(y, u, v)$ 的首項是

$$y^r r^{(s)}(u, v)=y^r\left(a \alpha^{(s)}(u, v)+b \beta^{(s)}(u, v)\right),$$

此地 α 与 β 不同时为零．故它满足条件(2.15)．如果在(二)中取 y^r 之系数 $\varphi_{*}^{(s)}(u, v)$ 与 $\psi_{*}^{(s)}(u, v)$，则在多項式

$$\lambda f(y, u, v)+\mu g(y, u, v)$$

中 y^r 之系数

$$\lambda \varphi_{*}^{(s)}(u, v)+\mu \psi_{*}^{(s)}(u, v)$$

也同(二)中一样，存在实数 ϵ，使对任何实数 y 有

$$\lambda \Phi_{*}^{(s)}(\epsilon+i y)+\mu \Psi_{*}^{(s)}(\epsilon+i y) \neq 0.$$

显然在此条件下对任何实数 x 有 $\chi_{*}^{(s)}(e^{x+is}) \neq 0$.

以下将要証明 $H(z)$ 沒有零根，而根具有正实部分的条件．

定理 6. 設 $h(z, t)$ 有首項 $a_{rs}z^r t^s$（参看(2.28)），令

$$H(z)=h(z, e^{z}) \text{ 及 } H(iy)=f(y)+ig(y).$$

如果 $H(z)$ 所有的根都在虛軸的左半平面，則当 y 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，向量 $\mathbf{w}=H(iy)$ 总以正速度向正方向旋轉，其解析表达式为 $G'(y)F(y)-F'(y)G(y)>0$，当 y 由 $-2k\pi$ 变到 $2k\pi$ 时，則 w 轉过 $4k\pi s+\pi r+\delta_1$，$\lim\limits_{k\to\infty}\delta_1=0$．反之，当 $-2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi$ 时，$\mathbf{w}$ 轉过 $4k\pi s+\pi r+\delta_1$，則它必以正速度向正方向旋轉，且 $H(z)$ 的零点均在虛軸的左半平面（在后一結論中，我們曾假定 $H(z)$ 在虛軸上无零根．如果沒有这个假定，就不能定义 w 的轉数）．

在証明定理 7 之前，先介紹一个名詞。

$p(y)$, $q(y)$ 为实变数的两个实函数，我們說它們的零点是交錯的，如果滿足下列三个条件：

(1) 零点均为单根；

(2) $p(y)$ 与 $q(y)$ 无相同之根；

(3) 在一个函数($p(y)$ 或 $q(y)$)的两个根之中必有另一个函数的一个根。

定理 7. 設 $h(z, t)$ 具有首項

$$H(z) = h(z, e^z), \quad H(iy) = F(y) + iG(y).$$

如果 $H(z)$ 的所有零点在虛軸的左方，則 $F(y)$, $G(y)$ 的零点是实的且互相交錯，并对所有的 y 有

$$G'(y)F(y) - G(y)F'(y) > 0. \tag{2.37}$$

欲使函数 $H(z)$ 的零点均在虛軸的左方，只需要滿足下面三个条件之一：

1) $F(y)$, $G(y)$ 的零点是实的、交錯的，且不等式(2.37)至少对一个 y 滿足；

2) 如果函数 $F(y)$ 的所有零点是实的，且它的每个零点滿足(2.37)，卽有 $F'(y_0)G(y_0) < 0$；

3) 函数 $G(y)$ 所有的零点是实的，而且每一个零点 $y = y_0$ 都滿足(2.37)，卽 $G'(y_0)F(y_0) > 0$。

定理 6,7 的証明分下列几点来論証：

a) 当 $a \leqslant y \leqslant b$ 时，$w = H(iy)$ 的轉数以 $\nu(a, b)$記之，知

$$\frac{d}{dy}\nu(0, y) = \frac{G'(y)F(y) - G(y)F'(y)}{F^2(y) + G^2(y)}, \tag{2.38}$$

故 $\frac{d}{dy}\nu(0, y)$ 之正負号与 $G'(y)F(y) - G(y)F'(y)$ 相重合。

b) $\nu(a + \varepsilon, b + \varepsilon) = \nu(a, b) + \delta_2$, $\qquad$ (2.39)

当 ε 固定，$a \to \pm\infty$, $b \to \pm\infty$ 时，$\delta_2 \to 0$。首先我們有

$$\nu(a, b) = \nu(a, c) + \nu(c, b),$$

同时由函数 $H(z)$ 的結构直接可以看出

$v(a, a+\varepsilon) = \varepsilon + \delta_3$ 且当 ε 固定，$a \to \pm\infty$ 时，$\delta_3 \to 0$.
两者合并卽得(2.39).

c) 設 λ, μ 是不同时为零的两个实数，証明存在实数 ε，使对任何实数 y，同时满足下列四个不等式：

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\Phi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)+\mu\Psi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0,\\ &\mu\Phi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)-\lambda\Psi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0,\\ &\Phi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0,\\ &\Psi_*^{(s)}(\varepsilon+iy)\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

由定理 3，对函数 $\lambda F(y)+\mu G(y)$, $F(y)$, $G(y)$ 保証可以满足. 由这些不等式知，当 k 相当大时，点 $H(\pm 2k\pi+\varepsilon i)$ 不在 w 平面的三条直綫上：

$$\lambda w'+\mu w''=0,\ \ w'=0,\ \ w''=0\ (w=w'+iw'').$$

由定理 6 前面的注知，(2.40)可以同时满足.

d) 設 $V(-2k\pi, 2k\pi)=\tau(4k\pi s+\pi r)+\delta_4$, 这里 $\tau=\pm 1$, 当 $\frac{1}{k}\to 0$, $\delta_4\to 0$ 时. 在此条件下我們要証明函数

$$\lambda F(y)+\mu G(y)$$

只有实的单根. 对任何实的且不同时为零的 λ, μ,

$$\tau(G'(y)F(y)-F'(y)G(y))>0.$$

要証 d). 对已給的 λ, μ 选取满足条件c)的 ε, 由(2.39)知，当 y 由 $-2k\pi+\varepsilon$ 变到 $2k\pi+\varepsilon$ 时，w 轉过角

$$\tau(4k\pi s+\pi r)+\delta_5,$$

故从几何上明显看出，$w=H(iy)$ 曲綫穿过直綫 $\lambda w'+\mu w''=0$ 的不少于 $4ks+r$ 个不同的 y 点. 而从定理 3 知道，函数 $\lambda F(y)+\mu G(y)$ 在同一区間中的零点不多于 $4ks+r$ 个，故 $\lambda F(y)+\mu G(y)$ 的所有零点均为实的且无重根. 零点无重根这一性质，特别表示曲綫 $w=H(iy)$ 不切于直綫 $\lambda w'+\mu w''=0$, 亦卽 w 的向量在所有的时候都以不为零的速度向前进，由此由 a) 得出不等式

$$\tau(G'(y)F(y)-G(y)F'(y))>0.$$

現在証明定理 6 和定理 7 的前半段.

設函数 $H(z)$ 的所有零点在虛軸的左半面，則由定理 5 及 b) 知

$$v(-2k\pi,\ 2k\pi) = 4k\pi s + \pi r + \delta_6.$$

由d)知 $F(y)$ 与 $G(y)$ 的所有零点是正的、单的，又

$$G'(y)F(y) - G(y)F'(y) > 0,$$

因此向量 $\mathbf{w}$ 在所有的时間均以正速度正向(即反时鐘方向)旋轉. 由此，显然函数 $F(y)$ 与 $G(y)$ 的零点交錯，因此定理 6 与定理 7 的前半段結論得証.

往下我們再証定理 6 与定理 7 的后半段結論. 首先注意，如果

$$v(-2k\pi,\ 2k\pi) = 4k\pi s + r + \delta_7,$$

这里当 $\frac{1}{k} \to 0$ 时，$\delta_7 \to 0$. 則由定理 5 与 b) 可見函数 $H(z)$的零点都在虛軸的左半面. 因此定理 6 之后半段結論得証. 現在剩下再証明定理 7 的后半段結論，即如果条件 1),2),3) 中的任一个满足，則有

$$v(-2k\pi,\ 2k\pi) \geqslant 4k\pi s - \pi r + \delta_7.$$

我們先証1). 即 $F(y)$, $G(y)$ 的零点是实的、单的、交錯的，則由定理 3 及 b) 和几何直观，我們就有

$$v(-2k\pi,\ 2k\pi) = \tau(4k\pi + \pi r) + \delta_7.$$

故由 d) 知 $\tau(G'(y)F(y) - G(y)F'(y)) > 0$，而且由 1) 的条件知，不等式 (2.37) 至少对一个 y 满足，于是有 $\tau = 1$. 如果满足条件2)或3)，則由定理 3 及 b) 和几何直观知

$$v(-2k\pi,\ 2k\pi) = 4k\pi s + \pi r + \delta_7.$$

因此，如前知 $H(z)$的零点均在虛軸的左半面. 这样定理 6 与定理 7 全部証毕.

下面我們再补充一些在虛軸的右半面有根的情形.

定理 8. 設 $H(z) = h(z,\ e^z)$，此地 $h(z,\ t)$ 具有首項 $a_{rs}z^r t^s$. 以 $\chi_*^{(s)}(t)$ 表示 z^r 在多項式 $h(z,\ t)$ 中的系数，如果函数 $\chi_*^{(s)}(e^z)$ 至少有一根在虛軸的右方，則函数 $H(z)$就有无限多个零点在虛軸的

右方.

如果 $\chi_*^{(\varrho)}(e^z)$ 的零点均在虚軸左方,則函数 $H(z)$ 在虚軸右方有不多于有限个零点.

証明类似于定理 4.

关于 $\chi_*^{(\varrho)}(e^z)$ 的零点是否都在虚軸左方，可化为多項式来决定. 首先 $\chi_*^{(\varrho)}(e^z)$ 的零点是否在虚軸左方，由 $\chi_*^{(\varrho)}(t)$ 的零点在 $|t|<1$ 而定. 作变换

$$t=\frac{1+z_*}{1-z_*},$$

則将圓 $|t|<1$ 变到 $R(z_*)<0$. 由此在 $\chi_*^{(\varrho)}(t)$ 中作 $t=\dfrac{1+z_*}{1-z_*}$, 取出分子将会遇到用定理 6 及 7 来解 z_* 的多項式的根的間題.

末了要指出一点,理論的解决与实际的計算还有很大的距离.

§3. 常系数綫性微分方程組的李雅普諾夫函数的公式[11]

1) 我們考慮实常系数綫性微分方程組

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.1}$$

李雅普諾夫[7]証明;如果(3.1)的特征方程

$$|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_n)=0 \tag{3.2}$$

所有的根皆具負实部,那末对于任意給定的負定(正定) m 次齐次多項式 $U(x_1,\cdots,x_n)$, 恆存在唯一正定(負定) m 次齐次多項式 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 滿足方程

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\frac{\partial V}{\partial x_i}=U. \tag{3.3}$$

这里在于給定了負定 2 次(即 $m=2$) 齐次多項式 $U=-A\times\times\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, A 是正常数,根据(3.3)具体算出李雅普諾夫函数 V 的明显表达式,表示成一些平方的和,而其系数是路斯-霍尔維茨行列式

$$\Delta_1 = p_1,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 p_3 \\ p_0 p_2 \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n = \begin{vmatrix} p_1 p_3 \cdots p_{2n-1} \\ p_0 p_2 \cdots p_{2n-2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0 \cdots p_n \end{vmatrix} \qquad (3.4)$$

($p_0 = 1$, $p_k = 0$ 当 $k > n$) 的函数.

在本书的第三章我們将指出李雅普諾夫函数的明显表达式在实际問題中的用途，并且具体估計了微分差分方程中穩定情形的时滯界限.

2) **記号和基本定理.** 为书写簡单起見，我們引入一些記号：$1°$在 n 阶系数行列式 $|a_{s\sigma}|$ 中，第 j 列的元素換以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 之后，取它的 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 行及 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 列的元素 $(\nu_1 < \cdots < \nu_k)$ 作出的 k 阶子行列式，以 $M^{(j)}_{\nu_1, \cdots, \nu_k}(x_1, \cdots, x_n)$ 表示之；$2°$ 記号 $\sum M^{(j)}_{\nu_1, \cdots, \nu_k}(x_1, \cdots, x_n)$，或有时为方便起見簡写成 $\sum_k$，表示諸 $M^{(j)}_{\nu_1, \cdots, \nu_k}(x_1, \cdots, x_n)$ 对 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 的和，其中 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 是集 $(1, 2, \cdots, n)$ 中的各种可能組合，但必須取到数 j；$3°$行列式 Δ_s 的第 s 行中的所有元素 p_{k-1} 易以 $\sum M^{(j)}_{\nu_1, \cdots, \nu_k}(x_1, \cdots, x_n)$ 所得到的新行列式，以 $\Delta_{s,j}(x_1, \cdots, x_n)$ 表示.

基本定理. 給定实常系数綫性微分方程組(3.1)，則函数

$$V = \Delta_1 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma \pm 1}}^{n} \Delta_s \Delta_{\sigma,j}^2(x_1, \cdots, x_n) \qquad (3.5)$$

($\Delta_0 = 1$) 沿方程組(3.1)的积分曲綫的微商是

$$\frac{dV}{dt} = -2\Delta_1\Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2. \qquad (3.6)$$

这个公式当 $n = 2$ 时，是馬尔金(Малкин)[2]首先得到的. 作为例子，我們給出此公式当 $n = 3$ 时的形状：

$$
\left.\begin{aligned}
V &= p_3(p_1p_2 - p_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \\
&+ p_1p_3\left[\left(\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} \\ x_2 & a_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a_{13} \\ x_3 & a_{33}\end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{21} & x_2\end{vmatrix} + \right.\right. \\
&+ \left.\left.\begin{vmatrix} x_2 & a_{23} \\ x_3 & a_{33}\end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{31} & x_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & x_2 \\ a_{32} & x_3\end{vmatrix}\right)^2\right] + \\
&+ \left[\left(p_3x_1 - p_1\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\right)^2 + \left(p_3x_2 - p_1\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} \\ a_{21} & x_2 & a_{23} \\ a_{31} & x_3 & a_{33}\end{vmatrix}\right)^2 + \right. \\
&+ \left.\left(p_3x_3 - p_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3\end{vmatrix}\right)^2\right],
\end{aligned}\right\} \quad (3.7)
$$

$$
\frac{dV}{dt} = -2p_1(p_1p_2 - p_3)p_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \qquad (3.8)
$$

这样的函数(3.5)，不仅在(3.4)均大于零时是李雅普諾夫函数，而当(3.4)中沒有一个为零，或者虽然有的 Δ_i 为零，但若此时的 V 仍为正定函数时，也是李雅普諾夫函数.

3) 为了証明定理，我們先証下述引理.

引理 1. 下列諸式(3.9)—(3.14)是恆等的(沿(3.1)的积分曲綫来求微商):

$$
\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = -\Delta_1 x_j^2 -
$$

$$
- \sum M_{\nu_1}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n)\Delta_{1,j}(x_1, \cdots, x_n), \qquad (3.9)
$$

$$
\frac{d}{dt}\sum M_{\nu_1,\cdots,\nu_k}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^k p_k x_j -
$$

$$
- \sum M_{\nu_1,\cdots,\nu_{k+1}}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n), \qquad (3.10)
$$

$$
k = 1, 2, \cdots, n-1,
$$

$$
\frac{d}{dt}\sum M_{\nu_1,\cdots,\nu_n}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^n p_n x_j, \qquad (3.11)
$$

$$\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)=-\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{2\sigma-3}\ p_{2\sigma-1}\\ p_0\cdots p_{2\sigma-4}\ p_{2\sigma-2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\ \cdots\ p_{\sigma-1}\ p_{\sigma+1}\\ 0\ \cdots\ \Sigma_\sigma\ \ \Sigma_{\sigma+2}\end{vmatrix},\qquad(3.12)$$

$$\sigma=2,\cdots,n-2,$$

$$\frac{d}{dt}\Delta_{n-1,j}(x_1,\cdots,x_n)=-\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{2n-5}\ p_{2n-3}\\ p_0\cdots p_{2n-6}\ p_{2n-4}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots\cdots p_{n-2}\ p_n\\ 0\cdots\cdots\ \Sigma_n\ \ 0\end{vmatrix}=$$

$$=p_n\Delta_{n-2,j}(x_1,\cdots,x_n),\qquad(3.13)$$

$$\Delta_\sigma\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)+\Delta_{\sigma-1}\Delta_{\sigma+1,j}(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$=\Delta_{\sigma+1}\Delta_{\sigma-1,j}(x_1,\cdots,x_n),$$

$$\sigma=2,\cdots,n-2;\quad j=1,2,\cdots,n.\qquad(3.14)$$

証．上述諸恆等式中，(3.9)可直接由定义推得；(3.11)可仿照(3.10)来証明；(3.13)可仿照(3.12)，只須注意到(3.11)与(3.10)的不同之点就可以了．所以在此我們只証明(3.10)，(3.12)和(3.14)．

对于等式(3.10)，可以只限于討論 $j=1$ 的情形，因为变换原方程組(3.1)中 j 与 1 的位置，并不改变組(3.1)的本質，而可以使之变成 $j=1$．

(3.10)的左边是

$$\frac{d}{dt}\Sigma M^{(1)}_{1,\nu_2\cdots\nu_k}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{d}{dt}\Sigma\begin{vmatrix}x_1 & a_{1\nu_2} & \cdots a_{1\nu_k}\\ x_{\nu_2} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots a_{\nu_2\nu_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{\nu_k} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots a_{\nu_k\nu_k}\end{vmatrix}=$$

$$=\Sigma\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{1s} & a_{1\nu_2} & \cdots a_{1\nu_k}\\ a_{\nu_2 s} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots a_{\nu_2\nu_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{\nu_k s} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots a_{\nu_k\nu_k}\end{vmatrix}x_s=$$

$$
=\Sigma\sum_{r=2}^{n}\begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ a_{\nu_2 r} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_k r} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix} x_r+\Sigma\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ a_{\nu_2 1} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_k 1} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k} \end{vmatrix} x_1, \quad (*)
$$

其中 Σ 为对 $\nu_2,\cdots,\nu_k(1<\nu_2<\cdots<\nu_k\leqslant n)$ 的各种可能組合求和。

(3.10) 之右边是

$$
(-1)^k p_k x_1-\Sigma M^{(1)}_{1,\nu_2\cdots\nu_{k+1}}(x_1,\cdots,x_n)=
$$

$$
=(-1)^k p_k x_1-\Sigma M^{(1)}_{1,\mu_1\cdots\mu_k}(x_1,\cdots,x_n)=
$$

$$
=(-1)^k p_k x_1-\Sigma\begin{vmatrix} x_1 & a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k} \\ x_{\mu_1} & a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{\mu_k} & a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix}=
$$

$$
=\left[(-1)^k p_k-\Sigma\begin{vmatrix} a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix}\right] x_1-
$$

$$
-\Sigma\begin{vmatrix} 0 & a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k} \\ x_{\mu_1} & a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{\mu_k} & a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix}, \quad (**)
$$

其中 Σ 为对 $\mu_1,\cdots,\mu_k(1<\mu_1<\cdots<\mu_k\leqslant n)$的各种可能組合求和。我們來証明$(*)=(**)$。

含 x_1 的項:在$(**)$中,注意到 $(-1)^k p_k$ 是系数行列式 $|a_{s\sigma}|$ 的所有 k 阶主子行列式的和，而 $\Sigma\begin{vmatrix} a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix}$ 是不含 a_{11} 的所有 k 阶主子行列式的和，因而 $(**)$ 中 x_1 的系数是含 a_{11} 的 k 阶主子行列式的和，即$(*)$中 x_1 的系数，即 $(**)$ 中含 x_1 的項等于$(*)$中含 x_1 的項。

其他的 $x_i(i \neq 1)$：先証(**)中有的項，在(*)中必有．事实上：对任一組合 $\mu_1, \cdots, \mu_k(1 < \mu_1 < \cdots < \mu_k \leqslant n)$，考慮其中任一个 $\mu_i(1 \leqslant i \leqslant k)$，对应地，含 x_{μ_i} 的項是

$$
-(-1)^{1+(i+1)}\begin{vmatrix} a_{1\mu_1} & \cdots a_{1\mu_k} \\ \cdots & \cdots \\ a_{\mu_{i-1}\mu_1} & \cdots a_{\mu_{i-1}\mu_k} \\ a_{\mu_{i+1}\mu_1} & \cdots a_{\mu_{i+1}\mu_k} \\ \cdots & \cdots \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix} x_{\mu_i},
$$

而在(*)中，我們可取 $s = \mu_i$, $v_2 = \mu_1$, $\cdots$, $v_i = \mu_{i-1}$, $v_{i+1} = \mu_{i+1}$, $\cdots$, $v_k = \mu_k$, $v_2 \cdots v_k$ 构成一种組合，得到(*)中含 x_{μ_i} 的同样的一項：

$$
\begin{vmatrix} a_{1\mu_i} a_{1\mu_1} \cdots a_{1\mu_{i-1}} a_{1\mu_{i+1}} \cdots a_{1\mu_k} \\ a_{\mu_1\mu_i} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\mu_{i-1}\mu_i} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\mu_{i+1}\mu_i} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\mu_k\mu_i} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix} x_{\mu_i} =
$$

$$
= (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{1\mu_1} & \cdots a_{1\mu_k} \\ \cdots & \cdots \\ a_{\mu_{i-1}\mu_1} & \cdots a_{\mu_{i-1}\mu_k} \\ a_{\mu_{i+1}\mu_1} & \cdots a_{\mu_{i+1}\mu_k} \\ \cdots & \cdots \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix} x_{\mu_i}.
$$

即証明了(**)有的項(*)必有．

其次証(*)中有的項，在(**)中必有．事实上，对(*)中任取一組合 $v_2 \cdots v_k$ 及 s，若 $s =$ 某一个 v_0，則

$$\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_k s} & a_{\nu_k \nu_2} & \cdots & a_{\nu_k \nu_k} \end{vmatrix} = 0,$$

故只考慮 $s \neq \nu_\sigma (\sigma = 2, \cdots, k)$. 設 $\nu_i < s < \nu_{i+1}$，則(*)中含 x_s 的項是

$$\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_k s} & a_{\nu_k \nu_2} & \cdots & a_{\nu_k \nu_k} \end{vmatrix} x_s =$$

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_i} & a_{1s} & a_{1\nu_{i+1}} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_k \nu_2} & \cdots & a_{\nu_k \nu_i} & a_{\nu_k s} & a_{\nu_k \nu_{i+1}} & \cdots & a_{\nu_k \nu_k} \end{vmatrix} x_s,$$

在(**)中，取 $\mu_1 = \nu_2, \cdots, \mu_{i-1} = \nu_i, \mu_{i+1} = \nu_{i+1}, \cdots \mu_k = \nu_k$, $\mu_i = s$，得到同样含 x_s 的一項：

$$-(-1)^{1+(i+1)} \begin{vmatrix} a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_i} & a_{1s} & a_{1\nu_{i+1}} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_k \nu_2} & \cdots & a_{\nu_k \nu_i} & a_{\nu_k s} & a_{\nu_k \nu_{i+1}} & \cdots & a_{\nu_k \nu_k} \end{vmatrix} x_s,$$

卽証明了(*)中有的，(**)中亦必有．最后，注意到(*)中沒有两个行列式是一样的；(**)中亦是如此，这样就証明了(*)＝(**)．等式(3.10)証毕．

对于(3.12)，我們分两种情形来証明．設 σ 为奇数，由 $\Delta_{\sigma,i}(x_1, \cdots, x_n)$ 的定义及(3.10)，有

$$\frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,i}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_\sigma & \cdots & p_{2\sigma-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & p_0 & p_2 & \cdots & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_{\sigma+2} \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_\sigma & \cdots & p_{2\sigma-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & p_0 & p_2 & \cdots & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & 0 & p_2 & \cdots & p_{\sigma+1} \end{vmatrix} x_i - \begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_\sigma & \cdots & p_{2\sigma-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & p_0 & p_2 & \cdots & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma_3 & \cdots & \Sigma_{\sigma+3} \end{vmatrix}.$$

注意到 $p_0\equiv 1$, $x_j\equiv\Sigma_1$, 则上式就可以化成(3.12)的右边,对 σ 为奇数証毕. 設 σ 为偶数,则有

$$\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{\sigma-1}\cdots p_{2\sigma-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots p_1\quad\cdots p_{\sigma-1}\\ 0\cdots\Sigma_1\quad\cdots\Sigma_{\sigma+1}\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{\sigma-1}\cdots p_{2\sigma-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots p_1\quad\cdots p_{\sigma+1}\\ 0\cdots p_1\quad\cdots p_{\sigma+1}\end{vmatrix}x_j-\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{\sigma-1}\cdots p_{2\sigma-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots p_1\quad\cdots p_{\sigma-1}\\ 0\cdots\Sigma_2\quad\cdots\Sigma_{\sigma+2}\end{vmatrix},$$

前一項为零,因而上式等于(3.12)的右边,(3.12)証毕.

今証(3.14),我們将它們一起写到左边. 由 Δ_σ 及 $\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)$ 的定义及(3.12),有 $-\Delta_{\sigma+1}\Delta_{\sigma-1,j}(x_1,\cdots,x_n)+\Delta_{\sigma-1}\Delta_{\sigma+1,j}(x_1,\cdots,x_n)+\Delta_\sigma\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)=$

$$=-\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{2\sigma-1}p_{2\sigma+1}\\ p_0\cdots p_{2\sigma-2}p_{2\sigma}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots p_\sigma\quad p_{\sigma+2}\\ 0\cdots\ p_{\sigma-1}p_{\sigma+1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{2\sigma-5}p_{2\sigma-3}\\ p_0\cdots p_{2\sigma-6}p_{2\sigma-4}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots p_{\sigma-2}\ p_\sigma\\ 0\cdots\Sigma_{\sigma-2}\ \Sigma_\sigma\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{2\sigma-1}p_{2\sigma+1}\\ p_0\cdots p_{2\sigma-2}p_{2\sigma}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots p_\sigma\quad p_{\sigma+2}\\ 0\cdots\Sigma_\sigma\quad\Sigma_{\sigma+2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{2\sigma-5}p_{2\sigma-3}\\ p_0\cdots p_{2\sigma-6}p_{2\sigma-4}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots p_{\sigma-2}p_\sigma\\ 0\cdots p_{\sigma-3}p_{\sigma-1}\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{2\sigma-3}p_{2\sigma-1}\\ p_0\cdots p_{2\sigma-4}p_{2\sigma-2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots p_{\sigma-1}p_{\sigma+1}\\ 0\cdots p_{\sigma-2}p_\sigma\end{vmatrix}\begin{vmatrix}p_1\cdots p_{2\sigma-3}p_{2\sigma-1}\\ p_0\cdots p_{2\sigma-4}p_{2\sigma-2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots p_\sigma\quad p_{\sigma+2}\\ 0\cdots p_{\sigma-1}\ p_{\sigma+1}\\ 0\cdots\Sigma_\sigma\quad\Sigma_{\sigma-1}\end{vmatrix}.$$

如果将上式依次写成 $-AB+CD-EF$，把 A 和 C 按最后一行元素展开，A 中最后一行第 k 列的元素对应的子式記为 D_k，則显然有 $E=D_{\sigma+1}$，将 $-AB+CD$ 中有相同的 D_k 提出来，这样有

$$
-AB+CD-EF=D_{\sigma+1}\begin{vmatrix} p_1\cdots p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0\cdots p_{2\sigma-4} & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0\cdots p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0\cdots\Sigma_\sigma & \Sigma_{\sigma+2} \end{vmatrix}-
$$

$$
-D_\sigma\begin{vmatrix} p_1\cdots p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0\cdots p_{2\sigma-4} & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0\cdots p_{\sigma-1} & p_{\sigma-1} \\ 0\cdots\Sigma_\sigma & \Sigma_\sigma \end{vmatrix}+D_{\sigma-1}\begin{vmatrix} p_1\cdots p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0\cdots p_{2\sigma-4} & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0\cdots p_{\sigma-1} & p_{\sigma-3} \\ 0\cdots\Sigma_\sigma & \Sigma_{\sigma-2} \end{vmatrix}+
$$

$$
+\cdots+(-1)^\sigma D_1\begin{vmatrix} p_1\cdots p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0\cdots p_{2\sigma-4} & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0\cdots p_{\sigma-1} & 0 \\ 0\cdots\Sigma_\sigma & 0 \end{vmatrix}-D_{\sigma+1}\begin{vmatrix} p_1\cdots p_{2\sigma-3} & p_{2\sigma-1} \\ p_0\cdots p_{2\sigma-4} & p_{2\sigma-2} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0\cdots p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0\cdots\Sigma_\sigma & \Sigma_{\sigma+2} \end{vmatrix}.
$$

合并上式的第一项与最后一项之后，容易看出，上式是下面行列式的拉普拉斯（Laplace）展式：

$$
(-1)^{\sigma+1}\begin{vmatrix} p_1\cdots p_{2\sigma-1} & p_{2\sigma+1} & & \\ p_0\cdots p_{2\sigma-2} & p_{2\sigma} & & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & & \\ 0\cdots p_\sigma & p_{\sigma+2} & & \\ 0\cdots 0 & -p_{2\sigma-1} & p_1 & \cdots p_{2\sigma-3} \\ 0\cdots 0 & -p_{2\sigma-2} & p_0 & \cdots p_{2\sigma-4} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0\cdots p_{\sigma-1} & 0 & 0 & \cdots p_{\sigma-1} \\ \underbrace{0\cdots\Sigma_\sigma \quad 0}_{\sigma+1\text{个}} & & \underbrace{0\quad\cdots\Sigma_\sigma}_{\sigma-1\text{个}} & \end{vmatrix}\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\sigma\text{个}.
$$

今将它从第 2, 3, $\cdots$, σ 列分别减去第 $\sigma+2$, $\sigma+3$, $\cdots 2\sigma$ 列，然后将第 3, 4, $\cdots\sigma$ 行分别加到第 $\sigma+1$, $\sigma+2$, $\cdots 2\sigma-2$ 行上去，得到一个行列式，此行列式是 2σ 阶，在它的左下角有一个 σ 行 $\sigma+1$ 列的矩形块，其元素皆为零，$\sigma+(\sigma+1)=2\sigma+1>2\sigma$. 根据行列式中熟知的索波列夫（Соболев）証明的引理，知此行列式等于零. 等式(3.14)証毕.

4）我們着手証明定理.

基本定理的証明. 我們将 (3.5) 沿 (3.1) 的积分曲綫求微商，注意到 (3.9)，有

$$\frac{dV}{dt}=2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+$$

$$+2\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$=-2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}x_j^2-2\Delta_2\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}\left(\Sigma M_{\nu_1}^{(j)}(x_1,\cdots,x_\sigma)\times\right.$$

$$\left.\times\Delta_{1,j}(x_1,\cdots,x_n)\right)+$$

$$+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n);$$

由(3.13)，$p_n\Delta_{n-1}=\Delta_n$ 及(3.14)，有

$$\sum_{\sigma=1}^{n-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{n-3}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_\sigma)-$$

$$+\Delta_1\cdots\Delta_{n-4}\Delta_{n-2}\Delta_n\Delta_{n-2,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{n-2,j}\times$$

$$\times(x_1,\cdots,x_n)+\Delta_1\cdots\Delta_{n-3}\Delta_{n-1}\Delta_{n-1,j}\times$$

$$\times(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{n-1,j}(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$
=\sum_{\sigma=1}^{n-3}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)+
$$

$$
+\Delta_1\cdots\Delta_{n-4}\Delta_{n-1}\Delta_n\Delta_{n-3,j}(x_1,\cdots,x_n)\Delta_{n-2,j}\times
$$

$$
\times(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\sigma=1}^{n-4}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\times
$$

$$
\times\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)+\Delta_1\cdots\Delta_{n-5}\Delta_{n-2}\Delta_{n-1}\Delta_n\Delta_{n-4,j}\times
$$

$$
\times(x_1,\cdots,x_n)\Delta_{n-3,j}(x_1,\cdots,x_n).
$$

繼續用(3.14),由归納法,不难証明上式等于

$$
\Delta_3\cdots\Delta_n\Delta_{1,j}(x_1,\cdots,x_n)\times
$$

$$
\times\left[\Delta_{2,j}(x_1,\cdots,x_n)+\Delta_1\frac{d}{dt}\Delta_{1,j}(x_1,\cdots,x_n)\right],
$$

$(j=1,2,\cdots,n)$. 如果再注意到

$$
\Delta_1=p_1,\quad \Delta_2=p_1p_2-p_3,
$$

$$
\Delta_{2,j}(x_1,\cdots,x_n)=p_1\Sigma M^{(j)}_{\nu_1\nu_2\nu_3}(x_1,\cdots,x_n)-
$$

$$
-p_3\Sigma M^{(j)}_{\nu_1}(x_1,\cdots,x_n),
$$

$$
\Delta_{1,j}(x_1,\cdots,x_n)=\Sigma M^{(j)}_{\nu_2\nu_3}(x_1,\cdots,x_n)
$$

及(3.10),那末立即可得(3.6),定理証毕.

最后要指出,李雅普諾夫函数不是唯一的,可有各种作法,对特殊問題还可另行考虑其他公式.

§4. 伯尔曼(R. Bellman)定理[12]

我們考虑方程

$$
\frac{d^n x(t)}{dt^n}+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}c_{ik}\frac{d^k}{dt^k}x(t-\tau_i), \tag{4.1}
$$

$$
0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n.
$$

作变数变换,令

$$
x(t)=x_1(t),
$$

$$
\frac{d^k x(t)}{dt^k}=x_{k+1}(t),\quad k=1,2,\cdots,n-1, \tag{4.2}
$$

代入(4.1)中，将(2.1)化为

$$\frac{dx_n(t)}{dt}+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} c_{ik}x_{k+1}(t-\tau_i)=0,$$

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=x_{k+1}(t),\ (k=1,2,\cdots,n). \tag{4.3}$$

因此方程(4.1)被包含在更一般的系統中

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(2)}x_j(t-\tau_1)+\cdots, \tag{4.4}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

写成向量矩陣的形式为

$$\frac{dx(t)}{dt}=A_0x(t)+A_1x(t-\tau_1)+\cdots+A_nx(t-\tau_n). \tag{4.5}$$

$x(t)$ 是 n 維向量，A_k 是 $n\times n$ 級的矩陣，初值条件是

$$x(t)=\varphi(t),\quad 0\leqslant t\leqslant \tau_n. \tag{4.6}$$

我們先考虑最簡单的 $n=1$ 时的情形，卽考虑方程

$$\frac{dx(t+1)}{dt}=ax(t+1)+bx(t), \tag{4.7}$$

其初值条件为

$$x(t)=\varphi(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{4.8}$$

此处 $x(t)$和 $\varphi(t)$是一維向量的普通函数。我們假定初值函数滿足方程(4.7)，卽

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)=a\varphi(t)+b\varphi(0). \tag{4.9}$$

对 $t=1$，和在区間(0,1)中 $\varphi(t)$ 是有界变差的函数、那显然在条件(4.8)下的解是存在和唯一的。我們用拉氏变換建立(4.7)的形式解

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}x(t+1)e^{-\lambda t}\,dt=$$

$$=a\int_0^\infty x(t+1)e^{-\lambda t}dt+b\int_0^\infty x(t)e^{-\lambda t}dt \tag{4.10}$$

或者

$$x(1)+\lambda e^{\lambda}\int_{1}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt=$$

$$=ae^{\lambda}\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt+b\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt. \qquad (4.11)$$

利用(4.8)可以写成

$$\varphi(1)-(\lambda e^{\lambda}-ae^{\lambda})\int_{0}^{1}\varphi(t)e^{-\lambda t}dt=$$

$$=(b+ae^{\lambda}-\lambda e^{\lambda})\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt. \qquad (4.12)$$

因此，利用拉氏变换的反变换公式，得到解为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{\left[\varphi(1)-(\lambda e^{\lambda}-ae^{\lambda})\int_{0}^{1}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1\right]}{b+ae^{\lambda}-\lambda e^{\lambda}}e^{t\lambda}d\lambda, \qquad (4.13)$$

此处 c 是适当选取的一条直綫.

现在我們作以下的稳定性假設：

令 $b+ae^{\lambda}-\lambda e^{\lambda}=0$ 的所有根位于 $R(\lambda)=-\lambda_0<0$ 的左边，取 c 为直綫 $-\frac{\lambda_0}{2}+is$, $-\infty<s<+\infty$. 我們将証明，由(4.13)表出的 $x(t)$ 就是方程(4.7)的解，并满足初值条件(4.8).

将 $x(t)$ 写为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\left[\frac{\varphi(1)-b\int_{0}^{1}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{b+ae^{\lambda}-\lambda e^{\lambda}}\right]e^{t\lambda}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\left[\int_{0}^{1}\varphi(t_1)e^{\lambda t_1}dt_1\right]e^{t\lambda}d\lambda=x_1(t)+x_2(t). \qquad (4.14)$$

事实上，当 $t>1$ 时，$x_2(t)=0$，并且当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$x_2(t)=\varphi(t)$. 我們并指出，当 $t<1$ 时，$x_1(t)=0$，这是因为积分 $x_1(t)$ 当 $R(\lambda)>-\lambda_0$ 时是解析的. 基本的方法是以 $\left(-\frac{\lambda_0}{2},\ 0\right)$ 为中心，R 为半径，作一个位于 $-\frac{\lambda_0}{2}+is$ 右边的充分大的半圆积分

(如图 2.6). 因被积函数是解析的，由柯西定理知，当 $t<1$ 时，$x_1(t)$ 表示的积分为零并且定义：$t=1$ 时，$x(1)=\varphi(1)$. 剩下的将要証明，当 $t>1$ 时，$x_1(t)$满足方程 (4.7).

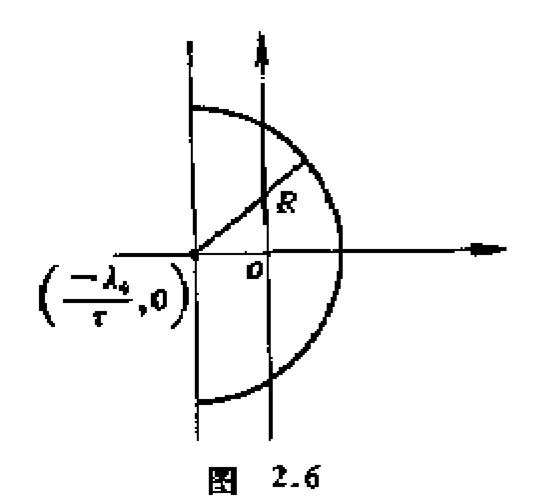


图 2.6

直接証明

$$x(t)=x_1(t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\left[\varphi(1)-b\int_0^1\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1\right]}{[b+ae^\lambda-\lambda e^\lambda]}e^{t\lambda}d\lambda \qquad (4.15)$$

当 $t>1$ 时满足方程(4.7)是比較困难的，我們将証明

$$v(t)=\int_t^\infty x(t)dt$$

是方程

$$\frac{d}{dt}v(t+1)=av(t+1)+bv(t) \qquad (4.16)$$

的解，即 $v(t)$是方程(4.7)的一个解. 首先需要証明 $v(t)$的存在性. 如果我們証明了当 $t\to\infty$ 时 $x(t)\leqslant c_1e^{-\frac{1}{2}\lambda_0 t}$，$v(t)$的存在性也就由积分 $\int_t^\infty x(t)dt$ 的存在而被說明. 令 $\lambda=-\frac{\lambda_0}{2}+is$ 在积分 (4.15) 中，我們得到一个因子 $e^{-\frac{1}{2}\lambda_0 t}$，必須証明遺留的积分当 $t\to\infty$ 时是有界的. 要証明这点是不困难的，此处从略.

由(2.15)得

$$v(t)=\int_t^\infty x(t_1)dt_1=$$

$$=\int_t^\infty\left(\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\left[\varphi(1)-b\int_0^1\varphi(t_2)e^{-\lambda t_2}dt_2\right]}{[b+ae^\lambda-\lambda e^\lambda]}e^{t_1\lambda}d\lambda\right)dt_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\left[\varphi(1)-b\int_0^1\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1\right]}{[b+ae^\lambda-\lambda e^\lambda]}\frac{e^{t\lambda}}{\lambda}d\lambda. \qquad (4.17)$$

将(4.17)代入下式中：

$$\frac{d}{dt} v(t+1) - av(t+1) - bv(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left[\varphi(1) - b \int_0^1 \varphi(t_1) e^{-\lambda t_1} dt_1 \right] \frac{e^{t\lambda}}{\lambda} d\lambda, \quad (4.18)$$

由此式可以看出，对任何綫路 c 而言，由于被积函数在 $t > 1$ 时是解析的，这由柯西定理知 (4.18) 的右端积分为零，这就証明了 $v(t)$是方程(4.7)的解. 由于(4.18)的左端为

$$-x(t+1) - a\int_{t+1}^{\infty} x(t_1)dt_1 - b\int_t^{\infty} x(t_1)dt_1 \equiv 0,$$

微分上式得

$$x'(t+1) - ax(t+1) - bx(t) \equiv 0,$$

这就証明了 $x(t) = x_1(t)$, 当 $t > 1$ 时是方程(4.7)的解并满足初值条件(4.8).

現在进一步研究函数 $x(t)$ 与 $\varphi(t)$ 的关系. 由

$$x(t) = \frac{\varphi(1)}{2\pi i} \int_c \frac{e^{t\lambda}}{[b + ae^{\lambda} - \lambda e^{\lambda}]} d\lambda -$$

$$- \frac{b}{2\pi i} \int_c \frac{\left[\int_0^1 \varphi(t_1) e^{-\lambda t_1} dt_1\right]}{[b + ae^{\lambda} - \lambda e^{\lambda}]} e^{t\lambda} d\lambda = J_1 + J_2, \quad (4.19)$$

下面主要来估計 J_1, J_2 两个积分的数值. 容易証明

$$|J_1| \leqslant c_2|\varphi(1)| \leqslant c_2 \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varphi(t)|, \ t \geqslant 1. \quad (4.20)$$

我們再来考虑 J_2, J_2 可以写为

$$J_2 = -\frac{b}{2\pi i} \int_0^1 \varphi(t_1) \left[\int_c \frac{e^{(t-t_1)\lambda} d\lambda}{[b + ae^{\lambda} - \lambda e^{\lambda}]} \right] dt_1. \quad (4.21)$$

这个积分是沿着綫路在 $R \to \infty$ 时从$-R$ 到 $+R$ 积分的极限. 利用收斂性及变换在有限区間上的积分，我們将得到在 $R \to \infty$ 时 (4.21) 的极限. 我們在前面已經指出过积分 $\int_c \frac{e^{(t-t_1)\lambda}}{b + ae^{\lambda} - \lambda e^{\lambda}} d\lambda$ 含有 $c_1 e^{\frac{1}{2}(-\lambda_0)(t-t_1)}$ 的因子，当 $t \to \infty$ 时，这个积分是有界的. 因此得到

$$|J_2| \leqslant c_1 \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varphi(t)|. \quad (4.22)$$

总結上述結果,我們得到定理.

定理 1. 若方程

$$\lambda e^{\lambda} - ae^{\lambda} - b = 0, \tag{4.23}$$

所有其根都位于 $R(\lambda) = -\lambda_0 < 0$ 的左边,則满足初值条件(4.8)的方程(4.7)的解是 $\varphi(t)$ 的一个連續运算,并有

$$\max_{0 \leqslant t < \infty} |x(t)| \leqslant c_1 \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varphi(t)|. \tag{4.24}$$

下面我們考虑非齐次的綫性微分差分方程

$$\frac{d}{dt} x(t+1) = ax(t+1) + bx(t) + w(t), \quad t > 0 \tag{4.25}$$

及

$$x(t) = \varphi(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.26}$$

假定 $w(t)$ 是可积的,我們知道解是存在且是唯一的. 我們用 $x_0(t)$ 表示(4.25)的齐次方程的解. 和上面一样,我們用拉氏变换将导出方程(4.25)的解为

$$x(t) = x_0(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\left[\int_0^{\infty} w(t_1) e^{-\lambda t_1} dt_1\right]}{b + ae^{\lambda} - \lambda e^{\lambda}} e^{t\lambda} d\lambda. \tag{4.27}$$

現在假定函数 $w(t_1)$ 使得积分 $\int_0^{\infty} w(t_1)e^{-\lambda t_1} dt_1$ 沿着綫路 c, 如同上面所述, 积分是存在的, 因为我們对右边这个綫路可任意改变. 因此,这个假定常常認为是不必要的,这样做的結果,是在 $0<t<1$ 时,就能使(4.27)的积分为零. 因此, $x(t)$ 就具有我們需要的有界性质. 对于 $t=1$, 我們定义 $x(t) = \varphi(1)$. 我們更进一步的假定 $w(t_1)$ 在有限区間上是有界变差的函数. 根据表示式 $\int_0^{\infty} w(t_1) \times \times e^{-\lambda t_1} dt_1$ 来驗証 $x(t)$ 满足方程(4.25)是沒有任何困难的. 現在我們将要証明(4.27)可以写成 $x_0(t)$ 及一个我們所要求的积分.

假定

$$\int_0^{\infty} |w(t_1)e^{-\lambda t_1}| dt_1 < \infty, \ \lambda = -\frac{1}{2}\lambda_0 + it, \tag{4.28}$$

則

$$x(t) = x_0(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} w(t_1) \left[\int_c \frac{e^{\lambda(t-t_1)} d\lambda}{b + ae^{\lambda} - \lambda e^{\lambda}}\right] dt_1 \tag{4.29}$$

或者

$$x(t+1)=x_0(t+1)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} w(t_1)\left[\int_c \frac{e^{\lambda}e^{\lambda(t-t_1)}d\lambda}{b+ae^{\lambda}-\lambda e^{\lambda}}\right] dt_1, \qquad (4.30)$$

我們看到这个积分除去 $t>t_1$ 外，沿着綫路它是为零的. 因此，对 $t>0$,

$$x(t+1)=x_0(t+1)+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{t} w(t_1)k(t-t_1)\,dt_1, \qquad (4.31)$$

其中

$$k(t-t_1)=\int_c \frac{e^{\lambda}e^{\lambda(t-t_1)}}{b+ae^{\lambda}-\lambda e^{\lambda}}d\lambda.$$

前面已証

$$|k(t)|\leqslant c_1 e^{-\frac{\lambda_0}{2}t}, \quad t\geqslant 0, \qquad (4.32)$$

因此，我們有

$$\int_0^t |k(t-t_1)|\,dt_1=\int_0^t |k(t_1)|\,dt_1<\int_0^{\infty}|k(t_1)|\,dt_1<\infty. \qquad (4.33)$$

总結以上結果，得到以下定理.

定理 2. 假定

$$b+ae^{\lambda}-\lambda e^{\lambda}=0, \qquad (4.34)$$

所有的根都位于 $R(\lambda)=-\lambda_0<0$ 的左边；再假定在任何有限区間上，$w(t_1)$ 是連續的有界变差的函数，并且有

$$\int_0^{\infty}|w(t_1)|e^{-\frac{1}{2}\lambda_0 t_1}dt_1<\infty, \qquad (4.35)$$

則滿足初值条件(4.26)的方程(4.25)的解，对 $t>0$，有

$$x(t+1)=x_0(t+1)+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{t} w(t_1)k(t-t_1)dt_1, \qquad (4.36)$$

此处

$$\int_0^{\infty}|k(t_1)|\,dt_1<\infty. \qquad (4.37)$$

以上我們考慮了非齐次綫性微分差分方程解的稳定性. 利用这个結果可以导致非綫性微分差分方程的情形. 我們考慮下面形式的非綫性微分差分方程

$$\frac{d}{dt}x(t+1)=ax(t+1)+bx(t)+f(x(t)) \quad t>0, \qquad (4.38)$$

初值条件

$$x(t)=\varphi(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{4.39}$$

假定 $f(x(t))$ 有下面的形式：

$$f(x(t))=b_1(t)x(t)+b_2(t)x(t+1)+ \\ +\sum_{i+j\geqslant 2} b_{ij}(t)x^i(t)x^j(t+1), \tag{4.40}$$

此处 $b_1(t)$, $b_2(t)$ 充分小，并在 $(0,\infty)$ 上絕对可积及 $|b_{ij}(t)|\leqslant b_{ij}$，此处的二重級数

$$\sum_{i+j\geqslant 2} b_{ij}x^iy^j \tag{4.41}$$

当 $|x|$, $|y|$ 充分小时是收斂的.

应用定理 2，对非綫性項可以引出考虑 Volterra 型的积分方程

$$x(t+1)=x_0(t+1)+\int_0^t f(x)k(t-t_1)dt_1. \tag{4.42}$$

对方程(4.38)，由定理 2 及应用逐次逼近法有

$$x^{(0)}(t+1)=x_0(t+1) \tag{4.43}$$

及

$$x^{(n+1)}(t+1)=x_0(t+1)+\int_0^t f(x^{(n)})k(t-t_1)dt_1, \tag{4.44}$$

由前面假定 $2c_1(\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|)e^{\frac{1}{2}(-k_0t)}$ 及 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|$ 充分小，由归納法我們容易証明叙列 $x^{(n)}(t+1)$ 均匀有界((4.35)被滿足)。級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x^{(n+1)}(t+1)-x^{(n)}(t+1)| \tag{4.45}$$

在任何有限区間上是均匀收斂的(参考[13])，因此，当 $n\to\infty$ 时，$x^{(n)}(t+1)\to x(t+1)$ 及

$$x(t+1)=x_0(t+1)+\int_0^t f(x)k(t-t_1)dt_1$$

成立. 由証定理 2 的过程，知道 $x(t)$ 是(4.38)的解并滿足初值条件(4.39)，因此，得到下面的定理.

定理 3. 如果方程 $\lambda e^{\lambda}-ae^{\lambda}-b=0$ 的所有根都位于

$R(\lambda) = -\lambda_0 < 0$ 的左边,并且 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |\varphi(t)|$ 充分小，則滿足初值条件 (4.39) 的方程 (4.38) 的解 $x(t)$ 存在且唯一,并当 $t \to \infty$ 时, $x(t) \to 0$.

唯一性是由 $f(x)$ 对 x 滿足李仆西慈条件而得到. 我們对于綫路 $\frac{1}{2}(-\lambda_0) + is(-\infty < s < +\infty)$ 証明了 $x_0(t) \leqslant c_1 e^{\frac{1}{2}(-\lambda_0 t)}$, 对非綫性項也不难得到此結論,只要对綫性項变更綫路 $\frac{1}{4}(-\lambda_0)+is$ 及仅需要当 $t\to\infty$ 时, $b_1(t), b_2(t)\to 0$. 除假定 $\varphi(t)$ 連續及 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|$ 的大小外,对 $\varphi(t)$ 沒有其他限制. 而前面的結論需要 $\varphi(t)$ 是有界变差的函数, 由此, 我們得到滿足条件(4.39)的方程(4.38)的解是連續的、有界变差的. 如果 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|$充分小,則解也充分小.

对 $|b_{ij}(t)| \leqslant b_{ij}$ 的限制是不必要的,加大系数为 $e^{(\lambda_0-\varepsilon)t}(\varepsilon > 0)$, 則可略去詳細証明的經过.

对綫性微分差分方程組(4.5),卽

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t) + A_1x(t-\tau_1) + A_2x(t-\tau_2) + \cdots + \\ + A_nx(t-\tau_n),$$

显易解的穩定性的研究与上面对方程 (4.7) 的情形本質上沒有什么不同, 故略去其詳細的討論. 对非綫性微分差分方程組的討論亦略去.

§5. 伏里德 (И. А. Фрид) 定理[14]

考慮具有常时滯的綫性方程

$$x^{(n)}(t+\tau_m) = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu}x^{(\nu)}(t+\tau_\mu)$$
$$(0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m), \qquad (5.1)$$

初值为

$$x^{(\nu)}(t) = \varphi^{(\nu)}(t) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_m),$$

$\varphi^{(\nu)}(t)$ 是連續有界变差函数. (5.1)之特征方程为

$$D(\lambda) = \lambda^n e^{\tau_m \lambda} - \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu} \lambda^\nu e^{\tau_\mu \lambda}. \qquad (5.2)$$

假定方程(5.2)的特征根中只有有限个实部为零的单根，而其他的所有根的实数部分都满足条件

$$R(\lambda) < -d \quad (d > 0),$$

则可証(5.1)的解有下列估值：

$$|x^{(\nu)}(t)| < k e^{-ct} + M.$$

对所有的 $t \geqslant 0$ 及 $0 \leqslant \nu \leqslant n-1$，此地 k, M, c 为正常数．又当初値相当小时，常数 M 可以任意小．

由此結果即可証明下述定理．

定理 1. 假定具有时滞的方程(5.1)的特征方程(5.2)仅有有限个实部为零的单根，而其余所有根的实部都小于某一个負数 $-d$，則(5.1)的零解是稳定的．

先証有一个时滞的情形：

$$\dot{x}(t+\tau) = ax(t+\tau) + bx(t), \qquad (5.3)$$

在 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 时，初值 $x(t) = \varphi(t)$，$\varphi(t)$ 是連續有界变差函数．

設方程(5.3)的特征方程

$$D(\lambda) = \lambda e^{\tau\lambda} - ae^{\tau\lambda} - b \qquad (5.4)$$

有两个共軛純虛根 ip 与 $-ip(p > 0)$，其他的所有根都有

$$\mathrm{Re}(\lambda) < -d \quad (d > 0).$$

証明的方法是对形如(5.3)的方程作拉氏变换，然后再作反变换得到 $x(t)$，这时有

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

要証明：

$t > \tau$ 时，$x_2(t) = 0$，$x_1(t)$ 滿足方程(5.3)，

$0 \leqslant t \leqslant \tau$ 时，$x_2(t) = \varphi(t)$，即 $x_2(t)$ 等于給定的初值，

$0 \leqslant t < \tau$ 时，$x_1(t) = 0$，

則由解之唯一性与連續性知道，当 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 时，

$$x(t) = \varphi(t).$$

又当 $t \geqslant \tau$ 时，$x(t)$ 滿足方程(5.3)．然后估計当 $t \geqslant \tau$ 时的 $x(t)$，

得到

$$|x(t)| < ke^{-ct} + M,$$

只要对应的初值函数任意小，M可以任意小.

这里有一点要注意，在決定解时，必需对 $t \geqslant 0$ 均满足方程，而我們只証明了对 $t \geqslant \tau$ 时满足方程. 因此，我們还要証明或者补証所得到的解在 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 中满足方程，或者使这样的初值函数在 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 中也满足方程. 直接可以驗出，这个解在 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 中不满足方程. 因此，我們应当对初值函数的选取加上补充限制. 但是，可以选取初值函数，使其不加补充限制，用下面方法来估計解：

在 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 中給定連續的具有有限变差的初值函数 $\varphi(t)$，这时有解 $\bar{x}(t)$，解 $\bar{x}(t)$ 满足方程(对 $t \geqslant 0$). 如果初值函数相当小，則解对初值的連續依賴性也相当小（[25] 第一章第三节）. 在 $\tau \leqslant t \leqslant 2\tau$ 中，我們对 $\bar{x}(t)$用新的初值函数代之，用我們的方法可以得到当 $t > 2\tau$ 时方程的解 $x(t)$. 对这个 $x(t)$ 則得到它依賴于其初值函数 $\bar{x}(t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant 2\tau)$ 的函数估值.

由定理的証明即得解是稳定的. 如果 $\max\limits_{\tau \leqslant t \leqslant 2\tau} |\bar{x}(t)|$ 足够小，而 $\max\limits_{\tau \leqslant t \leqslant 2\tau} |\bar{x}(t)|$ 之小度保証了初值函数 $\varphi(t)$ 的小度. 但由唯一性

$$x(t) = \bar{x}(t), \quad 对\ t \geqslant 2\tau.$$

由作法 $$x(t) = \bar{x}(t), \quad 对\ \tau \leqslant t \leqslant 2\tau.$$

因此，当初值 $\varphi(t)$ 相当小，对应于此函数的方程(5.3)的解 $x(t)$ 是稳定的.

引理. 如果方程

$$D(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} \lambda^{\nu} e^{\tau_{\mu}\lambda}$$

的根的实数部分在 (a, b) 之外，則对任何数 $c = \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$，满足不等式 $a < c < b$ 有估值

$$|D(\lambda)| > k|\lambda|^{n},$$

此地 $\lambda = c + it\ (-\infty \leqslant t \leqslant +\infty)$，而 k 为正常数(假定至少有一个 $a_{\mu n} \neq 0,\ 0 \leqslant \mu \leqslant m$).

証. 将 $D(\lambda)$ 写成

$$D(\lambda) = \lambda^n \sum_{\mu=0}^{m} a_{\mu n} e^{\tau_\mu \lambda} + \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu} \lambda^\nu e^{\tau_\mu \lambda},$$

取 T 如此大，使当 $|t| > T$ 时有不等式

$$\frac{1}{2}\left|\lambda^n \sum_{\mu=0}^{m} a_{\mu n} e^{\tau_\mu \lambda}\right| > \left|\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu} \lambda^\nu e^{\tau_\mu \lambda}\right|,$$

則对 $|t| > T$ 有

$$|D(\lambda)| > \frac{1}{2}|\lambda|^n \left|\sum_{\mu=0}^{m} a_{\mu n} e^{\tau_\mu \lambda}\right|$$

或者

$$|D(\lambda)| > k_1|\lambda|^n, \quad k_1 > 0.$$

对 $|t| \leqslant T$，可以取 $k_2 > 0$，使得

$$k_2 < \frac{|D(\lambda)|}{|\lambda|^n}.$$

这种 k_2 一定可以取得，这是因为 t 在有限区間中，而分母分子均不为零。

于是当 $|t| \leqslant T$ 时，有

$$|D(\lambda)| > k_2|\lambda|^n.$$

取 $k = \min(k_1, k_2)$，对所有 t，得到

$$|D(\lambda)| > k|\lambda|^n \text{ 及 } k > 0.$$

引理証毕。

以下来証明这个定理。

对方程(5.3)应用拉氏变换得

$$\int_0^\infty x'(t+\tau)e^{-\lambda t}dt = a\int_0^\infty x(t+\tau)e^{-\lambda t}dt + b\int_0^\infty x(t)e^{-\lambda t}dt,$$

利用分部积分得到

$$[x(t+\tau)e^{-\lambda t}]_0^\infty + \lambda\int_0^\infty x(t+\tau)e^{-\lambda t}dt =$$
$$= a\int_0^\infty x(t+\tau)e^{-\lambda t}dt + b\int_0^\infty x(t)e^{-\lambda t}dt.$$

因所有积分絕对收斂，故当 $t \to \infty$，$x(t+\tau)e^{-\lambda t} \to 0$ 时，变换前两个积分的积分变数，有

$$-x(\tau)+\lambda e^{\tau\lambda}\int_{\tau}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt=$$

$$=ae^{\lambda\tau}\int_{\tau}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt+b\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt$$

或

$$(\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda})\int_{\tau}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt-b\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt=x(\tau).$$

两方同时加上

$$(\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda})\int_{0}^{\tau}x(t)e^{-\lambda t}dt,$$

又注意到在 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 时 $x(t)=\varphi(t)$，得到

$$(\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b)\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt=\varphi(\tau)+$$

$$+(\lambda e^{\lambda\tau}-ae^{\lambda\tau})\int_{0}^{\tau}\varphi(t)e^{-\lambda t}dt.$$

用拉氏积分反变换得到

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+\gamma}e^{t\lambda}\frac{\varphi(\tau)+(\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda})\int_{0}^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\lambda\tau}-ae^{\tau\lambda}-b}d\lambda, \tag{5.5}$$

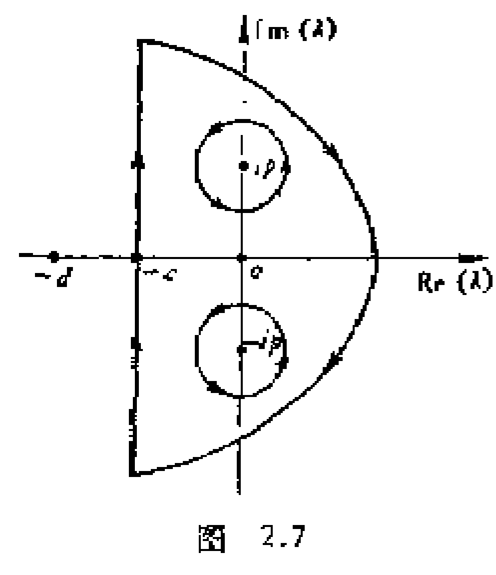


图 2.7

此地 Γ 表示直綫 $\lambda=-c+is$，c 为滿足条件 $0<c<d$ 的常数而 s 則在区間 $-\infty\leqslant s\leqslant+\infty$ 中变化。又 γ 表示两个閉綫路，一个包含点 ip，另一个包含点 $-ip$，中間及边上无其他根。

現在要証明，对所有 $t\geqslant\tau$，(5.5) 为方程(5.3)的解。当 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 时，又等于 $\varphi(t)$。将(5.5)写成

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+\gamma}e^{t\lambda}\frac{\varphi(\tau)+b\int_{0}^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+\gamma}\left[\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1\right]e^{t\lambda}d\lambda.$$

我們来考慮

$$x_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+\gamma}\left[\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1\right]e^{t\lambda}d\lambda.$$

引进輔助函数

$$g(t)=\begin{cases}\varphi(t) & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0 & t>\tau,\end{cases}$$

則有

$$x_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+\gamma}\left[\int_0^\infty g(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1\right]e^{t\lambda}d\lambda.$$

但这个是 $g(t)$ 的拉氏反变换，故 $x_2(t)=g(t)$，亦即

$$x_2(t)=0,\qquad 当\ t>\tau,$$

$$x_2(t)=\varphi(t),\ 当\ 0\leqslant t\leqslant\tau.$$

現在考慮 $x_1(t)$:

$$x_1(t)=x_{1\Gamma}(t)+x_{1\gamma}(t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\lambda\tau}-b}e^{t\lambda}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\lambda\tau}-b}e^{t\lambda}d\lambda.$$

当 $t<\tau$ 时，将有

$$x_{1\Gamma}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b}e^{t\lambda}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda-a-be^{-\lambda\tau}}e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda;$$

$$x_{1\gamma}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b}e^{t\lambda}d\lambda=$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau) + b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda - a - be^{-\tau\lambda}}\, e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda.$$

由柯西（Cauchy）定理，用約当（Jordon）引理[1]知道 $x_{1\Gamma}(t)$ 等于在 ip 及 $-ip$ 两点所算出的留数，而 $x_{1\gamma}(t)$ 也等于这些留数，但反号．因积分路綫相反，故当 $t<\tau$ 时，有

$$x_{1\Gamma}(t) = -x_{1\gamma}(t)$$

及

$$x_1(t) = x_{1\Gamma}(t) + x_{1\gamma}(t) = 0.$$

对 $t>\tau$，将証明 $x_{1\Gamma}(t)$ 与 $x_{1\gamma}(t)$ 都是方程(5.3)的解，于是由方程的綫性与齐次性知，对 $t>\tau$，$x_1(t) = x_{1\Gamma}(t) + x_{1\gamma}(t)$ 也是方程(5.3)的解．

将 $x_{1\gamma}(t)$ 代入方程(5.3)，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau) + b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda - a - be^{-\tau\lambda}}\,\lambda e^{\lambda t}d\lambda -$$

$$-\frac{a}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau) + b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda - a - be^{-\lambda\tau}}\, e^{\lambda t}d\lambda -$$

$$-\frac{b}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\varphi(\lambda) + b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda - a - be^{-\lambda\tau}}\, e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\varphi(\tau) + b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1\right]e^{\lambda t}d\lambda = 0.$$

由柯西定理，故当 $t>\tau$ 时，有 $x_{1\gamma}(t)$ 满足方程(5.3)．

要証 $x_{1\Gamma}(t)$ 是方程(5.3)的解更要复杂些．引进辅助函数

$$v(t) = \int_t^{\infty} x_{1\Gamma}(t_1)\,dt_1.$$

先証 $v(t)$ 对 $t>\tau$ 是方程(5.3)的解，然后借助于微分容易証明 $x_{1\Gamma}(t)$ 也是方程(5.3)的解．首先必須証明 $v(t)$ 的存在性．为此，要

---

1) 参考 М. А. Лаврентьев 与 Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М.—Л., 1951, 第五章第2节．

估計 $x_{1\Gamma}(t)$。因所研究的是 $t > \tau > 0$，故由柯西定理，用約当引理有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}}e^{t\lambda}d\lambda\equiv 0.$$

因此可写成

$$x_{1\Gamma}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b}e^{t\lambda}d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}}e^{t\lambda}d\lambda$$

或者

$$x_{1\Gamma}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{(\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b)\lambda e^{\tau\lambda}}(ae^{\tau\lambda}+b)e^{t\lambda}d\lambda.$$

由已証的引理有 $|\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b|>k_1|\lambda|$，則

$$|x_{1\Gamma}(t)|\leqslant\frac{e^{-ct}}{2\pi e^{-c\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi(\tau)+b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1|}{k_1|\lambda|\cdot|\lambda|}|ae^{\tau\lambda}+b|d\lambda.$$

因分母有 $|\lambda|^2$，故积分收歛。由此有

$$|x_{1\Gamma}(t)|<ke^{-ct},\tag{5.6}$$

此地 k 为正常数。

由于 $v(t)$ 的存在，我們將有

$$v(t)=\int_t^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\lambda\tau}-b}e^{t_2\lambda}d\lambda\right)dt_2=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\lambda\tau}-b}\cdot\frac{e^{t\lambda}}{\lambda}d\lambda.$$

变换积分次序，很容易检驗上式成立。

將 $v(t)$ 代入(5.3)得

$\dot{v}(t+\tau)-a\dot{v}(t+\tau)-bv(t)=$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b}\cdot\frac{\lambda e^{\tau\lambda}e^{t\lambda}}{\lambda}d\lambda +$$

$$+\frac{a}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b}\cdot\frac{e^{\tau\lambda}e^{t\lambda}}{\lambda}d\lambda +$$

$$+\frac{b}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b}\cdot\frac{e^{t\lambda}}{\lambda}d\lambda,$$

或者

$$\dot v(t+\tau)-av(t+\tau)-bv(t)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\varphi(\tau)+b\int_0^\tau\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1\right]\frac{e^{t\lambda}}{\lambda}d\lambda,$$

由柯西定理，用約当引理得方程的右方为零．因此，$v(t)$ 是方程(5.3)的解，故可写出恆等式

$$\dot v(t+\tau)-av(t+\tau)-bv(t)\equiv 0.$$

将 $v(t)$ 的表示式

$$v(t)=\int_t^\infty x_{1\Gamma}(t)dt$$

代入，有

$$-x_{1\Gamma}(t+\tau)-a\int_{t+\tau}^\infty x_{1\Gamma}(t_1)dt_1-b\int_t^\infty x_{1\Gamma}(t_1)dt_1\equiv 0.$$

微分上式得到

$$\dot x_{1\Gamma}(t+\tau)-ax_{1\Gamma}(t+\tau)-bx_{1\Gamma}(t)\equiv 0.$$

由此，对 $t>\tau$，$x_{1\Gamma}(t)$ 是方程(5.3)的解，故对 $t>\tau$ 有

$$x_1(t)=x_{1\Gamma}(t)+x_{1r}(t)$$

满足方程(5.3)。

因此，我們已証对 $0\leqslant t\leqslant\tau$，$x(t)=x_1(t)+x_2(t)\equiv\varphi(t)$，对 $t>\tau$，有 $x_1(t)=x_{1\Gamma}(t)+x_{1r}(t)$ 满足方程(5.3)。

現在要估計 $x(t)$，当 $t>\tau$ 时．因 $x_2(t)=0$，故只要估計 $x_1(t)$ 即可．

由(5.6)得到 $|x_{1\Gamma}(t)|<ke^{-\varepsilon t}$；估計第二項

$$x_{1\gamma}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b}e^{t\lambda}d\lambda,$$

等于計算 ip 及 $-ip$ 的留数．它为一次极点．留数在分母的单根 λ_0 为

$$\left[\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\frac{d}{d\lambda}[\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b]}e^{t\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-\lambda_0 t_1}dt_1}{\tau\lambda_0 e^{\tau\lambda_0}+e^{\tau\lambda_0}-a\tau e^{\tau\lambda_0}}e^{t\lambda_0}=$$

$$=\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-\lambda_0 t_1}dt_1}{e^{\tau\lambda_0}+b\tau}e^{t\lambda_0},$$

且由于 λ_0 为单根，有 $e^{\tau\lambda_0}+\tau b\neq 0$．由此得到

$$|x_{1\gamma}(t)|\leqslant\left|\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{-ipt_1}dt_1}{e^{\tau ip}+\tau b}e^{ipt}\right|+$$

$$+\left|\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau \varphi(t_1)e^{ipt_1}dt_1}{e^{-\tau ip}+\tau b}e^{-ipt}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\varphi(\tau)|+|b|\tau\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\tau}|\varphi(t)|}{|e^{\tau ip}+\tau b|}+$$

$$+\frac{|\varphi(\tau)|+|b|\tau\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\tau}|\varphi(t)|}{|e^{-\tau ip}+\tau b|}.$$

分母均为常数，分子为 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\tau}|\varphi(t)|$ 的次数，故可写成

$$|x_{1\gamma}(t)|<\bar{M}\max_{0\leqslant t\leqslant\tau}|\varphi(t)|=M.$$

当 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\tau}|\varphi(t)|$ 任意小时，M 可使之任意小，因此有

$$|x_1(t)|<ke^{-ct}+M.$$

上面我們是假定有两个純虛根的情形．显然，如果在虛軸上有 n 个（n 为有限数）单根（包括零根 $\lambda_0=0$ 在内），則解的估值不

变，只是在M内加入在这个根的被积函数的留数之和，而且每一个留数都将与 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant \tau}|\varphi(t)|$綫性相关.

对于n阶的并有m个时滞的方程(5.1)或对具有若干个时滞的綫性齐次方程組,証明将是类似的.

因此,定理完全証毕.

定理 2. 若在特征方程(5.2)中具有实部为零的重根，則方程(5.1)的零解是不稳定的.

証. 設$\lambda=\lambda_0$是重根(零根或純虚根)，γ为包有这个根的某閉曲綫,但不包含其他的根在內或在边上.

积分

$$x_{1\gamma}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)+b\int_0^\tau\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1}{\lambda e^{\tau\lambda}-ae^{\tau\lambda}-b}e^{t\lambda}d\lambda$$

等于在点$\lambda=\lambda_0$被积函数的留数. 以$F(\lambda)$表分子，$D(\lambda)$表分母,在λ_0, $F(\lambda)$是解析的，$D(\lambda)$有重根. 因此有

$$F(\lambda)=c_0+c_1(\lambda-\lambda_0)+c_2(\lambda-\lambda_0)^2+\cdots+c_i(\lambda-\lambda_0)^i+\cdots,$$

$$D(\lambda)=b_0+b_1(\lambda-\lambda_0)+b_2(\lambda-\lambda_0)^2+\cdots+b_i(\lambda-\lambda_0)^i+\cdots,$$

此地 $c_i=\dfrac{F^{(i)}(\lambda_0)}{i!}$, $b_i=\dfrac{D^{(i)}(\lambda_0)}{i!}$,且$c_0\neq0$. 又如果$\lambda_0$为$D(\lambda)$的$m$重根，則$b_0=b_1=\cdots=b_{m-1}=0$,$b_m\neq0$. 設$\lambda_0$为$D(\lambda)$的二重根,則 $b_0=b_1=0$,$b_2\neq0$.

$\dfrac{F(\lambda)}{D(\lambda)}$在$\lambda_0$的留数为

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^2F(\lambda)}{D(\lambda)}\right]\bigg|_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{c_0+(\lambda-\lambda_0)c_1+(\lambda-\lambda_0)^2c_2+\cdots}{b_2+(\lambda-\lambda_0)b_3+(\lambda-\lambda_0)^2b_4+\cdots}\right]\bigg|_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=\left\{\frac{[c_1+2(\lambda-\lambda_0)c_2+\cdots][b_2+(\lambda-\lambda_0)b_3+\cdots]}{[b_1+(\lambda-\lambda_0)b_3+\cdots]^2}-\right.$$

$$-\frac{[c_0+(\lambda-\lambda_0)c_1+\cdots][b_3+2(\lambda-\lambda_0)b_4+\cdots]}{[b_2+(\lambda-\lambda_0)b_3+\cdots]^2}\Bigg\}\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=\frac{c_1b_2-c_0b_3}{b_2^2}.$$

如果 λ_0 是 $D(\lambda)$ 的 m 次重根，則 $b_0=b_1=\cdots=b_{m-1}=0$, $b_m\neq 0$.

$\frac{F(\lambda)}{D(\lambda)}$ 在 λ_0 的留数为

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_0)^m F(\lambda)}{D(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\left[\frac{c_0+(\lambda-\lambda_0)c_1+\cdots}{b_m+(\lambda-\lambda_0)b_{m+1}+\cdots}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}.$$

微分之后，代入 $\lambda=\lambda_0$, 在分子有 $c_0, c_1, \cdots, c_{m-1}$ 的綫性表示，c_{m-1} 的系数为 $b_m\neq 0$ 的某个次数，但

$$c_i=\frac{F^{(i)}(\lambda_0)}{i!},\ F(\lambda)=\left[\varphi(\tau)+b\int_0^{\tau}\varphi(t_1)e^{-\lambda t_1}dt_1\right]e^{t\lambda}.$$

当 $F(\lambda)$微分 $m-1$ 次，再代入 $\lambda=\lambda_0$, 則有具有常系数的 t 的多項式。

因此，对于特征拟多項式具有等于零的实数部分的重根，則对 $x_{1\Gamma}(t)$ 之估計仍然如前：

$$|x_{1\Gamma}(t)|<ke^{-ct}.$$

而 $x_{1Y}(t)$ 則为具常系数的 t 的多項式，因此，非零解 $x(t)=x_1(t)=x_{1\Gamma}(t)+x_{1Y}(t)$. 对 $t>\tau$, 当 t 相当大时，可以大于已給的任意数. 因此，零解不稳定.

对于 n 阶方程具有 m 个时滞的情形，零解的不稳定性类似的可以証明。

第三章　一維系統的运动稳定性

§1. 赫斯定理[17]

在我們的問題中，需要研究超越方程

$$\tau(S) \equiv Se^S - ae^S - b = 0 \tag{1.1}$$

的根的分布問題．特别，要知道在怎样的条件下就可保証方程(1.1)的根具有性質 $R(S) < 0$ 或者 $R(S) \leqslant -k < 0$．注意(1.1)中的 a，b 是实数，因此我們引进了赫斯定理．在未講此定理之前，我們首先証明下列二个引理．

引理 1. 考慮方程

$$S = Ce^S \tag{1.2}$$

位于 S 的上半平面的根．

(i) 当 $C > 0$，在每一带形区域

$$2p\pi < v < (2p+1)\pi \ (p = 0, 1, 2, \cdots, S = u + iv) \tag{1.3}$$

內方程(1.2)都有一个根位于曲綫

$$v = \pm(C^2e^{2u} - u^2)^{1/2} \tag{1.4}$$

与曲綫

$$u = v\cot v \tag{1.5}$$

的对应分枝的唯一交点上．除此而外，当 $0 < C \leqslant e^{-1}$ 时，对应于 $p = 0$ 的带形区域內，既不含曲綫(1.4)与(1.5)的交点，亦不含方程(1.2)的根．

(ii) 当 $C < 0$ 时，方程(1.2)的根都位于下列每一个带形区域

$$(2p+1)\pi < v < 2(p+1)\pi \quad (p = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.6}$$

內的曲綫(1.4)与(1.5)的交点上．

(iii) 在这两种情形都有对应的方程(1.2)的根位于 S 的下半平面．

(iv) 方程(1.2)只有实根是当 $C = e^{-1}$ 时才行，且 $S = 1$ 是方程(1.2)的重根。

(1) 当 $0 < C < e^{-1}$ 时，方程(1.2)有两个根位于实軸的正半軸与曲綫(1.4)的交点上。

(2) 当 $C < 0$ 时，方程(1.2)只有一个根在实軸的負半軸与曲綫(1.4)的唯一交点上。

証． 首先我們注意，如果 $\xi + i\eta$ 是一个根，則 $\xi - i\eta$ 也是一个根，因为方程(1.2)中的系数是实数．所以我們只要考慮上半平面的根就可以了．

将 S 表成复数形式

$$S = re^{i\theta} = u + iv,$$

代入方程(1.2)卽得 $S = u + iv = Ce^{u+iv} = re^{i\theta}$，卽 $u = r\cos\theta$，$v = r\sin\theta$；$r = Ce^u$，$\theta = v$．由 $u^2 + v^2 = r^2$ 知 $v^2 = r^2 - u^2 = C^2e^{2u} - u^2$，所以

$$v = \pm(C^2e^{2u} - u^2)^{1/2}.$$

又 $\tan\theta = \dfrac{v}{u}$，所以 $u = v\cot\theta = v\cot v$．

在带形区域

$$\pi < v < 2\pi,\ 3\pi < v < 4\pi, \cdots,$$
$$(2p+1)\pi < v < 2(p+1)\pi$$

内，v 与 $\sin v$ 永远是反号的．又因为 $v = r\sin\theta$，因而 $v \neq \theta$，这也就説明了方程(1.2)在这些带形区域内是沒有根的．但是在带形区域

$$0 < v < \pi,\ 2\pi < v < 3\pi, \cdots,\ 2p\pi < v < (2p+1)\pi$$

内曲綫(1.5)的分枝与曲綫(1.4)的交点上有根这一点还是較明显的，因为在这些区域内，v 与 $\sin v$ 永远同号．

又当 $0 < C \leqslant e^{-1}$ 时，在 $p=0$ 所对应的带形区域 $0 < v < \pi$ 内，由 $u = v\cot v = v\dfrac{\cos v}{\sin v}$ 知，

$$u(0) = \lim_{v\to 0^+} v\cot v = 1,\quad u(\pi) = \lim_{v\to\pi-0} v\cot v = -\infty,$$

$$u'(v) = \cot v - v\csc^2 v < 0,$$

所以

$$u = v\cot v < 1 \quad (当\ 0 < v < \pi).$$

而另一方面，由 $v = \pm(C^2e^{2u} - u^2)^{1/2}$ 知，要有实根必須要 $C^2e^{2u} - u^2 > 0$，即 $C > \frac{u}{e^u}$ (对所有的 v $(0 < v < \pi)$)．但我們知道 ue^{-u} 此时是 u 的增函数，所以在所討論的情况下有 $\frac{u}{e^u} < \frac{1}{e^1} = e^{-1}$．因此，如果要求有 $C > \frac{u}{e^u}$，只要能够有 $C > e^{-1}$ 即可．可是根据条件假定此不可能，亦即 $C \leqslant e^{-1}$，从而我們就証明了在对应于 $p = 0$ 的带形区域 $0 < v < \pi$ 内方程 (1.2) 是无根的，这就是引理中的結論(i)．

当 $C < 0$ 时，我們有 $r = -Ce^u$，$\theta = v + \pi$，这是因为

$$S = re^{i\theta} = -re^{i(\theta+\pi)} = Ce^{u+iv} = Ce^u e^{iv},$$

此时可以看出，在带形区域

$$\pi < v < 2\pi,\ 3\pi < v < 4\pi, \cdots,\ (2p+1)\pi < v < 2(p+1)\pi$$

内，v 与 $\sin(\pi + v)$ 永远同号．因此，方程(1.2)就有位于这些带形区域内的曲綫(1.5)的分枝与曲綫(7)的交点上的根．以下驗証引理中第 (IV) 点的結論．既然我們要求方程 (1.2) 有实根，因此 $v = 0$，此时方程 $S = u + iv = Ce^{u+iv}$ 就变为 $u = Ce^u$．我們討論 $K(u) = Ce^u - u$．

首先我們討論 $0 < C < e^{-1}$ 的情形，此时 $K(1) = Ce - 1 < 0$，$K(0) = C > 0$，$K(\infty) > 0$，故在 $u > 0$ 的实軸至少有两个根(注意，此时在 $u < 0$ 时方程无根)．如果要求方程有重根，就应有 $K(u) = 0$，$K'(u) = 0$，即 $Ce^u - u = 0$ 与 $Ce^u - 1 = 0$．联合解之得 $u = 1$，这就是方程的重根．将 $u = 1$ 代入方程得 $Ce = 1$，所以 $C = e^{-1}$，这就是方程有重根 $u = 1$ 时，C 应满足的条件．

下面我們討論 $C < 0$ 时方程有实根的情形．由 $K(u) = Ce^u - u$，$K'(u) = Ce^u - 1 < 0$，所以 $K(u)$ 随 u 的上升而单調減

少. $K(0)=C<0$, $K(-\infty)>0$, 故方程必有且只有一实根位于 u 的負半軸上(在 $u>0$ 时方程无根), 这就是我們所要証明的引理中的第 IV 点結論. 至此引理得証. 为了更形象的說明引理的結論,以下用图解来說明方程(1.2)的根的分布情形.

由曲綫(1.4)我們得

$$\frac{dv}{du}=\pm\frac{C^2e^{2u}-u}{(C^2e^{2u}-u^2)^{1/2}}.$$

方程右端除 $u=\pm Ce^u(C\doteq e^{-1})$ 外是有限的,因此我們完全可以用图解来說明这个曲綫.

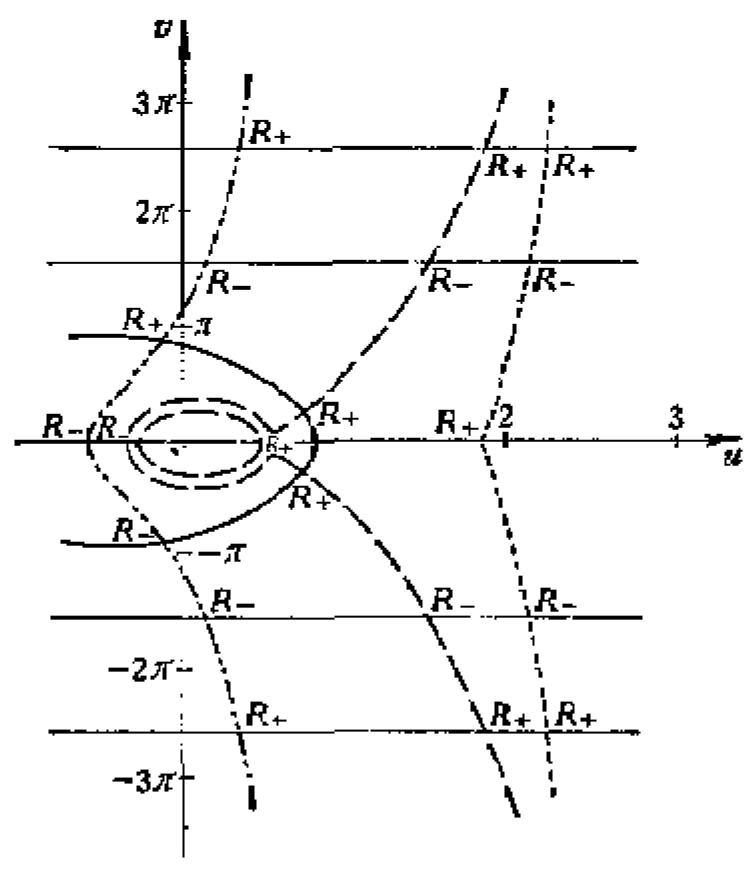


图 3.1

——表示曲綫 $u=v\cot v$;

$\left.\begin{array}{l}\cdot\cdot-\cdot\cdot-\cdot\cdot\\ ---------\\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\end{array}\right\}$ 表示曲綫 $v=\pm(C^2e^{2u}-u^2)^{1/2}$ 对应于 $\begin{cases}C=\pm0.3\\ C=\pm0.4\\ C=\pm4.0\end{cases}$ 的情形;

R_+ 表示方程 $S=Ce^S$ 对应于 $C>0$ 时的根;
R_- 表示方程 $S=Ce^S$ 对应于 $C<0$ 时的根.

由图中我們看出:

(i) 曲綫(1.4)的閉分枝只在 $-e^{+1}\leqslant C\leqslant e^{-1}$ 中存在, 这是因

为仅当 $C=e^{-1}$ 或 $C=-e^{1}$ 时方程(1.2)才有实根. 再注意引理的結論(IV)与(iii)即可.

(ii) 曲綫 (1.4) 的全部开分枝在实軸交点的右边,这是因为在这个分枝上的方程(1.2)的全部根都位于这个交点的右边.

(iii) 曲綫(1.4)的开分枝与曲綫(1.5)的每一个分枝在 $0<v<\pi$ 內只有一个交点. 关于这一点, 我們略为詳細的証明一下,因为在 $0<v<\pi$ 內, 不能直接看出(1.5)的分枝与(1.4)的交点个数.

我們不妨設 $S=\sigma+it\ (0<t<\pi)$ 是方程(1.2)在 $C>0$ 时的一个根,代入方程(1.2)就有

$$\sigma+it=Ce^{\sigma}(\cos t+i\sin t).$$

可是由 $S=\sigma+it=re^{i\theta}$ 及方程 $S=Ce^{S}$ 我們有

$$re^{i\theta}=Ce^{\sigma+it}=Ce^{\sigma}\cdot e^{it}\Longrightarrow r=Ce^{\sigma}\cdot\theta=t$$

及
$$\sigma=r\cos t\cdot t=r\sin t,$$

所以
$$|S|=r=Ce^{\sigma}=Ce^{r\cos t}.$$

前面已把 S 表成 $S=u+iv$ 的形式,当 S 是方程 $S=Ce^{S}$ 的根时,曾导出关系式 $u=v\cot v$. 結合現在討論的情形,就有 $\sigma=t\cot t$. 所以由关系式 $t=r\sin t$ 即可导出

$$t=r\sin t=Ce^{\sigma}\sin t=Ce^{t\cot t}\sin t,$$

亦即

$$t\cot t=\ln\left\{\frac{t}{C\sin t}\right\}.$$

令

$$\mu(t)=t\cot t-\ln\left\{\frac{t}{C\sin t}\right\},$$

則

$$\mu'(t)=\frac{\sin t\cos t-t}{\sin^{2}t}+\frac{t-\tan t}{t\tan t}<0.$$

因此当 t 在区間 $0<t<\pi$ 內递增时,函数 $\mu(t)$ 单調减少. 对所有的有穷正数 C 而言, 当 $\mu(\pi)<0$, $\mu(0)=1+\ln C>0$ 时,就可保証在带形区域 $0<t<\pi$ 內方程(1.2)恰有一根. 要达到此目的, 我們只要假設 $C>e^{-1}$, 否則当 $C<e^{-1}$ 时就有 $1+\ln C<0$.

可是 $\mu(\pi) < 0$，因此在这情况下，函数 $\mu(t)$ 在 $0 < t < \pi$ 內沒有根. 同样，当 $C > e^{-1}$ 时，对于下半平面的带形区域 $-\pi < t < 0$，函数 $\mu(t)$ 亦有一个零点. 总結上述討論，我們即得下述結論，即在 $0 < t < \pi$ 內，(1.5) 的分枝与曲綫(1.4)或者有一个交点或者沒有交点都是按 $|C| \gtrless e^{-1}$ 而定.

同理，在 $-\pi < t < 0$ 內，(1.5)的分枝与曲綫(1.4)或者有一个交点或者沒有交点都是按 $|C| \gtrless e^{-1}$ 而定.

引理 2. 方程 $S = Ce^S$ 的所有根位于直綫 $R(S)=K$ 的右边，当且仅当 $K < 1$

及 $Ke^{-K} < C < e^{-K}(v^2 + K^2)^{1/2}$,

这里对 $0 < v < \pi$ 的 v 而言，$v = v(K)$ 是 $v \cot v = K$ 的唯一零点.

在証明引理之前，首先注意方程(1.2)的根不能全部位于直綫 $R(S) = K (K \geqslant 1)$的右边，其原因如下：

1)当 $C < 0$ 时，方程(1.2)有一实根 $\zeta_3 < 0$. 这我們只要注意函数 $g(S) = S - Ce^S$ 的性質，即 $g(0) = -C>0$ 与 $g(-\infty)<0$ 即可.

2)当 $0 < C \leqslant e^{-1}$ 时，方程(1.2)有一实根 ξ_1(且 $0<\xi_1\leqslant 1$). 这只要注意函数$K(u) = Ce^u - u$ 具有性質 $K(0) = C > 0, K(1) = Ce - 1 \leqslant 0$.

3)当 $C > e^{-1}$ 时，方程(1.2)有一复根在带形区域 $0<v<\pi$ 內的曲綫(1.5)的分枝上，其中 $u \leqslant 1$ (由引理 1 即可得到此結論).

对应于最大的 C 值，方程 (1.2) 在 $-\pi < v < \pi$ 內位于直綫 $R(S) = K$ 右边所能取到的那些零点.

假設这些零点位于直綫 $R(S) = K$ 上，令其值为 $K \pm iv$，則有 $v \cot v = K$ 及 $v = (C^2e^{2K} - K^2)^{1/2}$，所以

$$v^2 = C^2e^{2K} - K^2, \text{ 即 } v^2 + K^2 = C^2e^{2K}.$$

因而
$$C = e^{-K}(v^2 + K^2)^{1/2}. \qquad (1.7)$$

如果 C 值比(1.7)的 C 值还要小，則方程(1.2)的零点就位于直綫 $R(S) = K$ 的右边.

如果 $C<0$ 时总可将 C 的最小值逐漸增大到使負实根 ζ_3 落到直綫 $R(S)=K$ 的右边(因为所有其它的根都位于此根的右边),则 $S-Ce^S\gtreqless 0$ 按 $S\gtreqless\zeta_3$ 而定. 如果 $K-Ce^K<0$, 就有 $K<\zeta_3$. 因此要使 ζ_3 落到 $R(S)=K$ 的右边,必須 $C>Ke^{-K}$. $C=0$ 时,方程有一根在原点. 最后还要說明 $v(K)$ 是 $v\cot v=K$ 的唯一零点(当 $0<v<\pi$ 时), 就是因为 $\frac{d}{dv}(v\cot v)=\frac{\sin v\cos v-v}{\sin^2 v}<$ <0 (当 $0<v<\pi$), 这說明 $\phi(v)=v\cot v$, 当 v 从 0 增长到 π 时是单調減少的, 且 $\phi(0)=1$, $\phi(\pi)=-\infty$. 所以在 $0<v<\pi$ 內 $\phi(v)=K$ 只有一个零点,引理 2 全部証完.

从引理 2 可推出下列的赫斯定理.

定理 1. 方程 $\tau(S)\equiv Se^S-ae^S-b=0$ 的零点位于直綫 $R(S)=0$ 的左边,当且仅当 $a<1$ 及

$$a<-b<(v^2+a^2)^{1/2},$$

这里 v 是 $v\cot v=a$ 在 $0<v<\pi$ 內的根.

証. 只要把 b 写成 $b=-Ce^a$, 再作变換

$$S=a-S_1,$$

代入方程(1.1)卽得

$$Se^S-ae^S+Ce^a=-S_1e^{a-S_1}+Ce^a=0,$$

所以

$$S_1=Ce^{S_1}. \tag{1.8}$$

由引理 2 知,要使 (1.8) 的全部根位于直綫 $\text{Re}(S_1)=a$ 的右边,当且仅当 $a<1$ 及 $ae^{-a}<C<e^{-a}(v^2+a^2)^{1/2}$, 亦卽要使方程 (1.1) 的所有根位于直綫 $\text{Re}(S)=0$ 的左边,当且仅当 $a<1$ 及 $ae^{-a}<C<e^{-a}(v^2+a^2)^{1/2}$. 因此, 一方面由 $ae^{-a}<C$ 就可推得 $a<Ce^a\to a<-b$, 另一方面由 $Ce^a<(v^2+a^2)^{1/2}$, 卽 $-b<(v^2+a^2)^{1/2}$, 綜合得

$$a<-b<(v^2+a^2)^{1/2}.$$

証毕.

象引理 2 的推論一样,我們有下列显然的論斷.

引理 3. 方程 $S = Ce^S$ 的一个根位于直綫 $R(S) = K$ 上，而所有其它的根位于此直綫的右边，当且仅当

$$K \leqslant 1 \text{ 及 } C = Ke^{-K}.$$

方程 $S = Ce^S$ 的两个根位于直綫 $R(S) = K$ 上，而所有其它的根位于此直綫的右边，当且仅当

$$K \leqslant 1 \text{ 及 } C = e^{-K}(v^2 + K^2)^{1/2}.$$

从引理 2 与引理 3 我們可以推得定理 1 的一个特殊情形，即赫斯的第二个定理。

定理 2. 方程

$$\tau(S) \equiv Se^S - ae^S - 0 = 0 \tag{1.1}$$

的根位于直綫 $R(S) = K$ 的左边，当且仅当

$a - K < 1$ 及 $(a - K)e^K < -b < e^K[v^2 + (a - K)^2]^{1/2}$,

这里 v 是方程 $v \cot v = a - K (0 < v < \pi)$ 的唯一的根。

1) 方程 (1.1) 有一个根位于直綫 $R(S) = K$ 上，而所有其它的根都位于此直綫的左边，当且仅当

$$a - K \leqslant 1 \text{ 及 } -b = (a - K)e^K.$$

2) 方程(1.1)有二个根位于直綫 $R(S) = K$ 上，而所有其它的根都位于此直綫的左边，当且仅当

$$a - K \leqslant 1 \text{ 及 } -b = e^K[v^2 + (a - K)^2]^{1/2}.$$

証. 作变换令 $b = -Ce^a$, $S = a - S_1$，则(1.1)就变成

$$S_1 = Ce^{S_1}. \tag{1.8}$$

方程(1.8)的所有根都位于直綫 $\mathrm{Re}(S_1) = a$ 的右边，当且仅当 $a < 1$ 及 $a < -b < (v^2 + a^2)^{1/2}$，其中 v 是 $v \cot v = a$ 在 $0 < v < \pi$ 內的唯一的根，亦即方程(1.1)的所有根都位于直綫 $\mathrm{Re}(S) = K$ 的左边，当且仅当方程(1.8)的所有根都位于直綫 $\mathrm{Re}(S_1) = a - K$ 的右边，其充要条件是

$$a - K < 1$$

及

$$(a - K)e^{-(a-K)} < C < e^{-(a-K)}[v^2 + (a - K)^2]^{1/2},$$

亦即

$$(a-K)e^K < Ce^a < e^K[v^2+(a-K)^2]^{1/2}.$$

再直接引用引理3，即得定理中的1)与2)两点結論.

§2. 綫性系統的等价性定理[18]

定理1. 考慮方程

$$u'(t) = au(t) + bu(t-\tau). \tag{2.1}$$

若常数 a 与 b 滿足条件

$$a+b<0, \tag{2.2}$$

則必存在一正数 $\Delta = \Delta(a, b) > 0$，使当 τ 滿足条件 $0 < \tau < \Delta$ 时，(2.1)之显易解为漸近穩定.

也就是說，由微分方程

$$u'(t) = (a+b)u(t) \tag{2.3}$$

的显易解为漸近穩定，即可推出在 $0<\tau<\Delta$ 的条件下，方程(2.1)的显易解漸近穩定.

証. 例如取 $\Delta = \Delta(a, b) = \dfrac{\pi}{8(|a|+|b|)} > 0$，任取常数 τ 滿足条件 $0 < \tau < \Delta$，又取常数

$$K = K(a, b) = -\frac{a+b}{2} > 0.$$

下面我們將証明，方程(2.1)的示性方程

$$ae^{\tau S} + b - Se^{\tau S} = 0 \tag{2.4}$$

的所有根 S_i 均滿足条件

$$\operatorname{Re}(S_i) \leqslant -K = \frac{a+b}{2} < 0. \tag{2.5}$$

我們証明(2.5). 因 $\tau > 0$，取 $z = \tau S$，則(2.7)化为

$$(\tau a)e^z + (\tau b) - ze^z = 0, \tag{2.4$'$}$$

而(2.5)化为

$$\operatorname{Re}(z_i) \leqslant -\tau K = \frac{\tau(a+b)}{2} < 0, \tag{2.5$'$}$$

此地 $z_i = \tau S_i$ 为方程(2.4)的根.

問題化为要証明 (2.5)$'$，这可利用赫斯的定理2来驗証之.

赫斯的定理 2 的原文如下：

"方程 $Se^S - a_1e^S - a_2 = 0$ 的根均在 $\mathrm{Re}(S) = K$ 的左方的充要条件是 $a_1 - K < 1$ 及 $(a_1 - K)e^K < -a_2 < e^K[v^2 + (a_1 - K)^2]^{1/2}$，此地 v 是在 $0 < v < \pi$ 中方程 $v \cot v = a_1 - K$ 的唯一的根。"

因此对(2.4)′要証(2.5)′只要驗証下面两个不等式

(i) $\tau a - \dfrac{\tau(a+b)}{2} < 1$,

(ii) $$\left(\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2}\right) e^{\frac{\tau(a+b)}{2}} < -\tau b <$$
$$< e^{\frac{\tau(a+b)}{2}} \left[v^2 + \left(\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2}\right)^2 \right]^{1/2}$$

即可。

(i) 之驗証如下：

$$\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2} \leqslant \Delta\left[|a| + \frac{|a| + |b|}{2}\right] \leqslant \frac{\pi}{8}\,\frac{3}{2} < 1.$$

其次驗証(ii)。先驗証左方的不等式，注意到

$$\frac{1}{2} < e^{-X} < 1 \quad 当\ 0 < X < \frac{1}{2},$$

而

$$0 < -\frac{\tau(a+b)}{2} < -\frac{\Delta(a+b)}{2} =$$
$$= -\frac{\pi}{16}\,\frac{(a+b)}{(|a| + |b|)} \leqslant \frac{\pi}{16} < \frac{1}{2},$$

則有

$$\left(\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2}\right) e^{\frac{\tau(a+b)}{2}} < \left(\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2}\right) =$$
$$= -\tau b + \frac{\tau(a+b)}{2} < -\tau b,$$

即得左方的不等式。現驗証(ii)的右方的不等式，显然有

$$e^{\frac{\tau(a+b)}{2}} \left[v^2 + \left(\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2}\right)^2 \right]^{1/2} > \frac{1}{2}\,[v^2]^{1/2} = \frac{1}{2}\,v,$$

故只要驗証 $\frac{1}{2}v > -\tau b$ 卽可.

注意到 V 是在 $0 < v < \pi$ 中方程

$$v = \left(\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2}\right)\tan v$$

之唯一的根. 以下分两种情形驗証 $\frac{1}{2}v > -\tau b$.

当 $\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2} \leqslant 0$, 则 $v \geqslant \frac{\pi}{2}$, 故

$$-\tau b \leqslant |\Delta b| = \frac{\pi|b|}{8(|a|+|b|)} \leqslant \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{v}{2}.$$

这种情形驗証完毕.

当 $\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2} > 0$, 则因

$$\left(\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2}\right)\tan\frac{\pi}{4} = \tau a - \frac{\tau(a+b)}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \Delta\left[|a| + \frac{|a|+|b|}{2}\right] \leqslant \frac{\pi}{8}\,\frac{3}{2} < \frac{\pi}{4},$$

故在 $0 < v < \pi$ 中,方程

$$v = \left(\tau a - \frac{\tau(a+b)}{2}\right)\tan v$$

之根 $v > \frac{\pi}{4}$. 由此卽得

$$-\tau b \leqslant |\Delta b| \leqslant \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4} < \frac{v}{2}.$$

故(i)及(ii)驗証毕. 因此(2.5)′或(2.5)得証.

在(2.5)或(2.5)′的基础上利用伯尔曼的定理 3 来証我們的定理 1. 伯尔曼的定理 3 可叙述如下:

"如果方程 $Se^S - a_1e^S - a_2 = 0$ 的根在 $\mathrm{Re}(S) = -\lambda < 0$ 的左方,又如果 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\phi(t)|$ 足够小,则对初始条件

$$u(t) = \phi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

方程

$$\frac{du(t+1)}{dt}=a_1u(t+1)+a_2u(t)$$

的解存在唯一,并且当 $t\to+\infty$ 时 $u(t)\to 0$."

现在只要取新自变数 t',使

$$t=\tau t'+\tau=\tau(t'+1)$$

及新函数

$$v(t'+1)=u(t),$$

則方程(2.1)化为

$$\frac{dv(t'+1)}{dt'}=\tau av(t'+1)+\tau bv(t').$$

这时由(2.5)'可取 $\lambda=-\frac{\tau(a+b)}{2}>0$,于是由伯尔曼定理知,当 $0\leqslant t'\leqslant 1$ 时,如果 $\max\limits_{0\leqslant t'\leqslant 1}|v(t')|$ 足够小,則 $v(t')$ 存在唯一,并且 $v(t')\to 0$ 当 $t'\to+\infty$. 由此当 $t=\tau t'+\tau\to+\infty$,則 $u(t)\to 0$,只要 $\max\limits_{-\tau\leqslant t\leqslant 0}|u(t)|$ 足够小. 这表示在条件(2.2)下,当 $0<\tau<\Delta=\frac{\pi}{8(|a|+|b|)}$ 时,方程(2.1)的零解是漸近穩定的.定理1証毕.

定理 2. 設方程(2.1)的系数 a 及 b 滿足条件

$$a+b>0, \tag{2.2$'$}$$

則对任何 $\tau>0$,方程(2.1)之显易解必为不穩定.

也卽是說,由方程(2.3)之显易解为不穩定,可以推出方程(2.1)之显易解不穩定对任何 $\delta>0$ 均成立.

証. 只要証明方程(2.4)在条件(2.2)'下对任何 $\delta>0$ 均有正实根 $S=S(\delta)>0$,卽可知方程(2.1)之显易解不穩定.

(2.4)可写成

$$S=a+be^{-S\tau}. \tag{2.4$''$}$$

不妨将 b 看成参数,a 看成定数,則在 (τ,S) 平面上由于 b 之不同而定义一系列的曲綫. 这系列曲綫的微分方程可如下算出:(2.4)''对 τ 微分之,有

$$\frac{dS}{d\tau}=be^{-S\tau}\left[-S-\tau\frac{dS}{d\tau}\right].$$

用(2.4)″消去参数 b，即用 $be^{-S\tau} = S - a$ 代入，則得

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{-S(S-a)}{1+\tau(S-a)}$$

或等价方程組

$$\frac{dS}{dt} = -S(S-a), \quad \frac{d\tau}{dt} = 1 + \tau(S-a).$$

由方程的来源知(2.4)″滿足这个方程，(2.4)″ 通过点

$$\tau = 0, \quad S = a + b.$$

現在在(τ, S)平面的第一象限中来研究(2.4)″之图形，分别 $a \leqslant 0$ 及 $a > 0$ 研究之。

設 $a \leqslant 0$，則在第一象限 $(\tau > 0, S > 0)$ 中

$$\frac{dS}{dt} < 0, \quad \frac{d\tau}{dt} > 1,$$

故(2.4)″之图形如图 3.2。 这里(2.4)″之图形不能穿过 $S = 0$，这是因为 $S = 0$ 是一解，而这个方程之解都是唯一的。

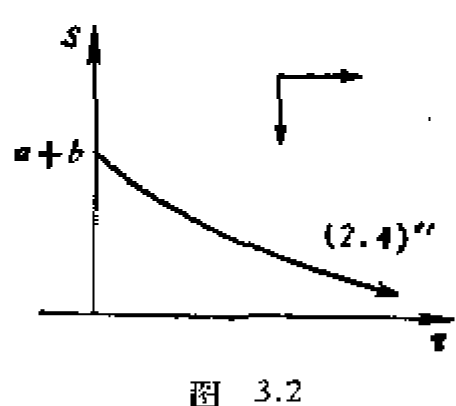


图 3.2

这个图形表明对任何 $\tau \geqslant 0$，有 $S = S(\tau) > 0$ 滿足 (2.4)″，这便是所要証的。

設 $a > 0$，則又要分别 $b > 0$，$b = 0$ 及 $b < 0$，来証之。$b = 0$ 时，(2.4)″化为 $S = a > 0$ 对任何 $\tau \geqslant 0$。証明即毕。

設 $a > 0$，$b > 0$，則研究(τ, S)平面上$\tau > 0$，$S > a > 0$中(2.4)″之图形。

在 $\tau > 0$，$S > a > 0$ 中有

$$\frac{dS}{dt} < 0, \quad \frac{d\tau}{dt} > 1,$$

故 (2.4)″ 之图形如图 3.3，这里 (2.4)″ 之图形不能穿过 $S = a$，这是因为 $S = a$ 是一个解，而这个方程的解都是唯一的。这个图形表明对任何 $\tau \geqslant 0$ 有

$$S = S(\tau) > a > 0$$

满足(2.4)″. 这便是所要証的.

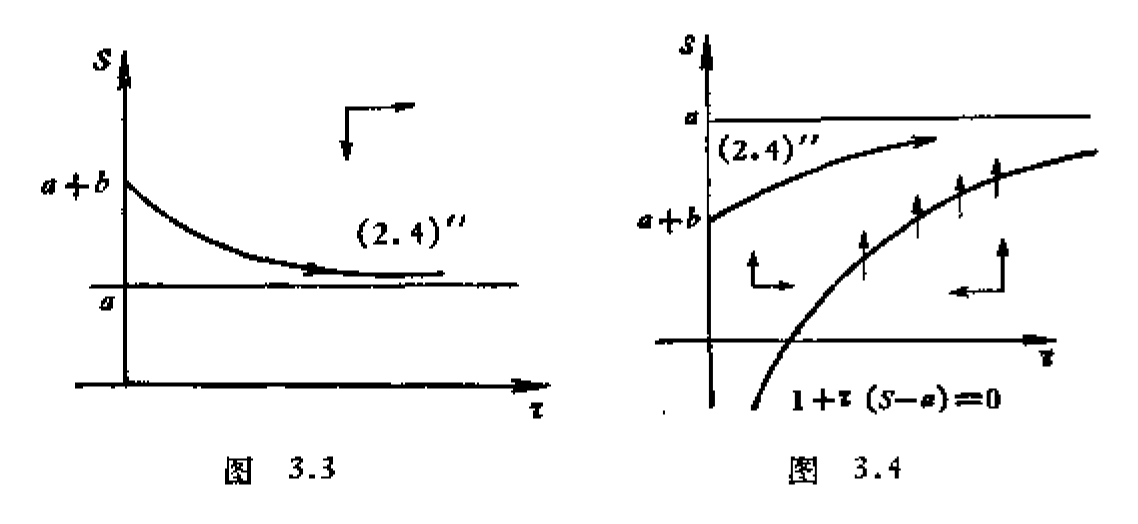


图 3.3　　　　图 3.4

設 $a>0, b<0$,我們研究(τ, S)平面上 $\tau>0$, $0<S<a$ 中(2.4)″ 之图形,此时微分方程之向量場如图 3.4. 在 $1+\tau(S-a)=0$ 上方有

$$\frac{d\tau}{dt}>0, \quad \frac{dS}{dt}>0.$$

又(2.4)″不能穿过

$$1+\tau(S-a)=0,$$

这由向量場之方向所保証. 因此(2.4)″之图形如图 3.4 所示.

由此知,对任何 $\tau \geqslant 0$ 有

$$S=S(\tau)>a+b>0$$

满足(2.4)″,这便是所要証明的.

总之,我們对 $\tau>0$ 有 $S=S(\tau)>0$ 满足 (2.4)″, 故定理 2 得証.

注. 上述証明不只知 $S(\tau)$ 的存在, 而且可看出 S 如何随 τ 而变化. 也可不計此种变化,則証明可簡化如下:命

$$H(S) \equiv S-a-be^{-\tau S},$$

則因 $\tau>0$, 故可見 $H(+\infty)=+\infty$, $H(0)=-a-b<0$. 由此必有 $S_0>0$, 使 $H(S_0)=0$. 定理 2 得証.

定理 3. 已給方程

$$u'(t)=au(t)-bu(t-\tau), \tag{2.6}$$

則必存在一正数 $\Delta=\Delta(a)>0$, 使当 $0<\tau<\Delta$, 方程(9)之显

易解稳定。

卽由方程

$$u'(t) = (a - a)u(t) = 0$$

之显易解的稳定可以推出方程(2.6)之显易解为稳定，只要 $0 < \tau < \Delta$ 卽可.

实际上，当 $a \leqslant 0$，可取 $\Delta = +\infty$；当 $a > 0$，则Δ之上限为 $\frac{1}{a}$.

証. $a = 0$ 时不必証明了. 以下分别 $a < 0$ 及 $a > 0$ 証明之.

設 $a < 0$，对任何 $\tau > 0$ 均可証 (2.6) 之显易解为稳定，例如取 $\varepsilon > 0$，则可取 $\eta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. 可証当

$$|u(t)| \leqslant \eta, \ (0 \leqslant t \leqslant \tau)$$

则必有

$$|u(t)| < \varepsilon, \ 对 \ t > 0.$$

証明是用反証法，卽設 $u(t)$ 跑出 $|u(t)| \leqslant \varepsilon$ 之外，不妨設 t_0 为 $u(t)$ 达到 ε（对 $-\varepsilon$ 相类得証）之第一个时間，卽 $u(t_0) = \varepsilon$，$u(t_0 - \tau) < \varepsilon$，故

$$u'(t_0) = au(t_0) - au(t_0 - \tau) < a\varepsilon - a\varepsilon = 0.$$

由 $u'(t_0) < 0$ 知存在 $\varepsilon_1 > 0$，使 $u(t_0 - \varepsilon_1) > u(t_0) = \varepsilon$，故 t_0 不能是达到 ε 之第一个时間. 这里发生了矛盾，故知 $|u(t)| < \varepsilon$ 对 $t > 0$，卽 $a < 0$ 时已証毕.

以下証 $a > 0$ 的情形.

首先，我們指出 $\tau = \frac{1}{a} > 0$ 时，(2.6)之显易解为不稳定，这只要注意到 $u(t) = \alpha t$（α 为任何实数）为方程

$$u'(t) = au(t) - au\left(t - \frac{1}{a}\right) \tag{2.7}$$

之一特解，卽得此結論.

其次要証可取 $\Delta = \frac{1}{a} > 0$，亦卽証明对任何 $0 < \tau < \Delta = \frac{1}{a}$，

方程(2.6)之显易解为稳定.

这只需要証明，在 $0<\tau<\frac{1}{a}=\Delta$ 时，方程(2.6)之特征方程

$$Se^{\tau S}-ae^{\tau S}+a=0 \tag{2.8}$$

的根除一个单根 $S=0$ 外，其他之根均满足不等式

$$R(S_i)\leqslant -K<0,\quad K>0, \tag{2.9}$$

于是由伏里德定理，知(2.6)的显易解为稳定.

以下驗算(2.8)的根之分布情形.

首先，(2.8)的左方展为 S 的冪級数时有

$$\begin{aligned}0&=S(1+\tau S+\cdots)-a(1+\tau S+\cdots)+a\\&=S(1-a\tau)+S^2(\cdots),\end{aligned}$$

而 $1-a\tau\fallingdotseq 0$，即可見 $S=0$ 为(11)的单根. 其次可由赫斯定理 2 来驗算其他的根均滿足条件

$$R(S_i)<0.$$

为此，只要研究(2.8)的等价方程(置 $u=\tau S$)

$$ue^u-(\tau p)e^u+(\tau a)=0,$$

其根除一个单根在 $u=0$ 外，其他根在 $R(u_i)<0$ 的充要条件为

$$\tau a\leqslant 1 \text{ 及 } -(-\tau a)=\tau a,$$

后者为恆等式，而前者由假定 $0<\tau<\Delta=\frac{1}{a}$ 所保証，故赫斯定理的条件滿足. 以下只要进一步証明存在 K，使得(2.9)滿足即可.

因 $\tau<\frac{1}{a}$，故置 $\tau=\frac{1}{ha}$，有 $h>1$. 現取

$$K=\frac{1}{\tau}\min\left[1,\frac{4}{3}(h-1)\right]>0,$$

要驗算此 K ((2.9)是滿足的)，以下用反証法. 設若不然，即(2.8)或其等价方程

$$S-a+ae^{-\tau S}=0 \tag{2.8$'$}$$

有根 S_0，滿足条件

$$0>R(S_0)>-K. \tag{2.10}$$

在 S_0 的周围取一长方形 M，由下不等式所界定：

$$|R(S)-R(S_0)|\leqslant \varepsilon<\frac{1}{2}(K+R(S_0))>0,$$

$$|I(S)|\leqslant L=|I(S_0)|+ae^{\frac{\tau}{2}(K-R(S_0))}.$$

現将(2.8)′分为两函数 $\varphi_1(S)=S-a$ 及 $\varphi_2(S)=ae^{-\tau S}$ 之和．当 S 繞 M 之边界一周时，$\varphi_1(S)$ 也繞一长方形 M'（卽 M 向左位移 a 所得者）之边界一周，而 $\varphi_2(S)$ 則在以 L 为半径、原点为中心之圓內运动，此可由

$$|\varphi_2(S)|\leqslant ae^{-\tau(R(S_0)-\varepsilon)}<ae^{\frac{\tau}{2}(K-R(S_0))}<L$$

見之．而长方形 M 或 M' 之一边为 $2L$，因此 M' 不能完全在以原点为心、L 为半径之圓內．現証明 $\varphi_2(S)$ 之軌迹必穿过 M' 最右的边，因为如果不然，則 $\varphi_2(S)$ 將在此边的右方，而 $\varphi_1(S)$ 則在此边的左方，卽知函数 $\varphi_1(S)+\varphi_2(S)$ 的軌迹不能繞原点整周，亦卽 M 中无(11)的根．这与 S_0 的选取相矛盾．現只有 $\varphi_2(S)$ 的軌迹穿过 M' 的最右边，卽穿过 $R(S)=R(S_0)-a+\varepsilon$，$-L<I(S)<L$ 所定义的綫段．但 $|\varphi_2(S)|$ 当 S 在 M 上时的最大值为 $ae^{-\tau(R(S_0)-\varepsilon)}$，由此知必有不等式

$$ae^{-\tau(R(S_0)-\varepsilon)}\geqslant|R(S_0)-a+\varepsilon|,$$

此不等式对 ε 的选取无关．命 $\varepsilon\to 0$ 卽得不等式

$$ae^{\tau(-R(S_0))}\geqslant|R(S_0)-a|=a-R(S_0). \tag{2.11}$$

另一方面，当 $0<x<\min\left[1,\frac{4}{3}(h-1)\right]$，可証

$$e^x<1+hx,$$

这是因为

$$e^x=1+x\left(1+\frac{x}{2!}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3\cdot 4}+\cdots\right)\right)<$$

$$<1+x\left(1+\frac{x}{2!}\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\cdots\right)\right)=$$

$$=1+x\left(1+\frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)(\text{因为 } x<1)$$

$$< 1 + x\left(1 + \frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) <$$

$$< 1 + x(1 + (h-1))\left(因为\ x < \frac{4}{3}(h-1)\right)$$

$$= 1 + hx.$$

现取 $x = \tau(-R(S_0)) < \tau K = \min\left[1, \frac{4}{3}(h-1)\right]$，则

$$ae^{\tau(-R(S_0))} < a[1 + h\tau(-R(S_0))] =$$

$$= a\left[1 + \frac{1}{a}(-R(S_0))\right] =$$

$$= a - R(S_0). \tag{2.12}$$

不等式(2.11)与(2.12)相矛盾，故满足(2.10)之 S_0 不存在，即(2.9)成立. 定理 3 証毕.

§3. 非綫性系統的等价性定理

定理 4. 已給方程

$$u'(t) = au(t) + bu(t-\tau) + F_2,$$

$$F_2 = \sum_{i+j\geq 2} c_{ij}(t)u(t)^i u(t-\tau)^j, \tag{2.13}$$

此地常数 a, b 及函数 F_2 满足条件

(i) $$a + b < 0; \tag{2.2}$$

(ii) 存在一数 $\varepsilon > 0$，使当 $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ 时有

$$\sum_{i+j\geq 2} c_{ij}|x^i||y^j| < +\infty,$$

此地 $|c_{ij}(t)| \leq c_{ij}$，則存在一数 $\Delta > 0$，使当 $0 < \tau < \Delta$，方程(2.13)之显易解漸近穩定，即由方程

$$u'(t) = (a+b)u(t) + \sum_{i+j\geq 2} c_{ij}(t)[u(t)]^{i+j} \tag{2.14}$$

的显易解的漸近穩定可以推出方程 (2.13) 的显易解的漸近穩定 $(a + b \neq 0)$.

証. 由定理 1 之証明有 $\Delta = \Delta(a, b) > 0$,使得当 $0<\tau<\Delta$ 时方程式(2.4)之根 S_i 满足不等式(2.5). 现在只要作变换

$$t = \tau T \text{ 及 } u(t) = v(T),$$

则方程(2.13)可化为方程

$$\frac{dU(T)}{dT} = \tau a v(T) + \tau b v(T-1) + \tau F_2(v(T), v(T-1)),$$

其示性方程(2.4)'的根满足不等式(2.5)'. 因此用伯尔曼之定理 3 即得 $v(T) \to 0$, 从而 $u(t) \to 0$ 当 $t \to +\infty$. 定理 4 証毕.

定理 5. 将定理 4 中方程(2.13)的条件(2.2)换为(2.2)',则对任何 $\tau > 0$, 方程(2.13)的显易解不稳定,即由方程式(2.14)的显易解不稳定,可以推出方程(2.13)的显易解不稳定,对任何 $\tau > 0$ $(a + b \neq 0)$.

証. 由(2.2)' $a + b > 0$, 及(ii)可以取 $\varepsilon > 0$ 如此小,使当 $|x| \leqslant \varepsilon, |y| \leqslant \varepsilon$,则有

$$F_2(|x|, |y|) < \frac{a+b}{4}(|x| + |y|).$$

现在只要証明,不論初始函数取得如何小,必有解当 $t \to +\infty$ 时跑出 $|u(t)| \leqslant \varepsilon$.

以下分别 $b \leqslant 0$ 及 $b > 0$ 两种情形来証明.

設 $b \leqslant 0$, 则在

$$0 < u(t-\tau) \leqslant u(t) \leqslant \varepsilon \tag{2.15}$$

的条件下有

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &> au(t) + bu(t-\tau) - \frac{a+b}{4}(u(t)+u(t-\tau)) \quad (\text{由 } \varepsilon)\\ &\geqslant au(t) + bu(t) - \frac{a+b}{4}(u(t)+u(t)) \left(\begin{matrix}\text{由 } a+b>0\\ b<0\end{matrix}\right)\\ &= \frac{a+b}{2}u(t).\end{aligned}$$

现在研究一比較方程

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{a+b}{2}\xi(t), \tag{2.16}$$

此方程有解

$$\xi(t) = Ce^{\frac{a+b}{2}t}, \quad C > 0.$$

現在在 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 中取初始函数 $u_1(t) = \xi(t)$, 研究方程(2.13)之解$u_1(t)$,要証此 $u_1(t)$ 跑出 $|u_1(t)| \leqslant \varepsilon$ 之外.

用反証法. 設对所有 $t \geqslant 0$, 恒有 $|u_1(t)| \leqslant \varepsilon$. 注意到 $a-\frac{a+b}{4} > -\left[b-\frac{a+b}{4}\right] > 0$ $\left(亦即\ a-b > \frac{a+b}{2}\right)$. 我們先証 $u_1(t)$ 是单調增加的. 首先 $u_1(t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 中单調增加,而且

$$u_1'(\tau+0) > \left(a-\frac{a+b}{4}\right)u_1(\tau) + \left(b-\frac{a+b}{4}\right)u_1(0) =$$

$$= \left(a-\frac{a+b}{4}\right)Ce^{\frac{a+b}{2}\tau} + \left(b-\frac{a+b}{4}\right)C >$$

$$> C\left(a-\frac{a+b}{4}+b-\frac{a+b}{4}\right) > 0,$$

故 $u_1(t)$ 在 $t > \tau$ 之后一段时間内仍然是单調增加的.

如果 $u_1(t)$ 当 t 継續增加时不是单調增加的,則至少在 $t > \tau$ 之某一个时刻必有 t 使得 $u_1'(t) = 0$. 設 t_0 为 $t>\tau$ 后的第一个使 $u_1'(t) = 0$ 的时間,則由单增性知 $u_1(t_0) > u_1(t_0-\tau) > 0$, 故

$$0 = u_1'(t_0) > \left(a-\frac{a+b}{4}\right)u_1(t_0) + \left(b-\frac{a+b}{4}\right)u_1(t_0-\tau) >$$

$$> \left(a-\frac{a+b}{4}\right)(u_1(t_0) - u_1(t_0-\tau)) > 0.$$

由 $0 > 0$ 得出矛盾,因此 $u_1(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 为单調增加. 从而条件(2.15)对 $u_1(t)$ 是滿足的,故对 $u_1(t)$ 有不等式

$$\frac{du_1(t)}{dt} > \frac{a+b}{2}u_1(t), \quad t \geqslant \tau.$$

由此即得 $u_1(t) \geqslant Ce^{\frac{a+b}{2}t}$, 当 $t \geqslant 0$ $(C > 0)$; 而当 $t \to \infty$, 則显然 $u_1(t) \to +\infty$, 即 $u_1(t)$ 有大于 ε 之时. 另一方面,当 $\tau > 0$ 固定时, $C > 0$ 可取得很小使得 $Ce^{\frac{a+b}{2}\tau}$ 小于任何已給之正数, 即初始函数可取得任意小. 故 $b \leqslant 0$ 时, (2.13)之显易解不穩定.

下面証 $b > 0$ 的情形. 必可取得 $n > 2$ 且使得

$$b - \frac{a+b}{n} > 0.$$

固定 n, 然后取 ε_1 如此小使得当 $|x| \leqslant \varepsilon_1$, $|y| \leqslant \varepsilon_1$ 有

$$F_2(|x|,|y|) \leqslant \frac{a+b}{n}(|x| + |y|),$$

则在条件

$$0 < u(t),\ u(t-\tau) \leqslant \varepsilon_1 \tag{2.17}$$

下有不等式

$$\frac{du(t)}{dt} > \left(a - \frac{a+b}{n}\right) u(t) + \left(b - \frac{a+b}{n}\right) u(t-\tau).$$

这时作辅助方程

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \left(a - \frac{a+b}{n}\right) \xi(t) + \left(b - \frac{a+b}{n}\right) \xi(t-\tau), \tag{2.18}$$

则因

$$\left(a - \frac{a+b}{n}\right) + \left(b - \frac{a+b}{n}\right) = (a+b)\left(1 - \frac{2}{n}\right) > 0,$$

故由定理 2 知方程(2.18)有特解

$$\xi(t) = Ce^{St},\ C > 0,\ S > 0.$$

现取初始函数 $u_1(t) = \xi(t) = Ce^{St}$ 在 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 中. 研究方程(2.13)之解 $u_1(t)$, 则显然有

$$u_1'(\tau+) > \xi'(\tau) > 0,$$

即在 $t > \tau$ 之一段时間中必有 $u_1(t) > \xi(t) > 0$. 用反証法可証对所有 $t > \tau$ 有 $u_1(t) > \xi(t)$. 如不然, 则以 t_0 为 $t > \tau$ 中第一个时間, 使 $u_1(t) = \xi(t)$, 于是

$$u_1(t_0) = \xi(t_0),\quad u_1(t_0 - \tau) \geqslant \xi(t_0 - \tau).$$

从而

$$u_1'(t_0) > \left(a - \frac{a+b}{n}\right) u_1(t_0) + \left(b - \frac{a+b}{n}\right) u_1(t_0 - \tau) \geqslant$$

$$\geqslant \left(a - \frac{a+b}{n}\right) \xi_1(t_0) + \left(b - \frac{a+b}{n}\right) \times \xi_1(t_0 - \tau) = \xi'(t_0).$$

由此知在 $\tau < t < t_0$ 中有 $u_1(t) < \xi(t)$, 因此, t_0 不是 $t > \tau$ 的第

一个使 $u_1(t)=\xi(t)$ 的时間，得到矛盾．故对所有 $t>\tau$ 有 $u_1(t)>\xi(t)>0$，而 $\xi(t)\to\infty$ 当 $t\to+\infty$，故 $u_1(t)\to+\infty$．即 $u_1(t)$ 将有大于 ε_1 之时，而初始函数可取 $C>0$ 如此小，使 $Ce^{S\tau}$ 小于任意已給之正数．故方程(16)之显易解在 $b>0$ 时也不稳定．定理 5 証毕．

定理 6. 已給方程

$$u'(t)=au(t)-au(t-\tau)+F_2, \qquad (2.19)$$

則对任何的 a 及任何的 τ，必可找到 F_2 使得方程(22)的显易解为不稳定．

証．当 $a\geqslant 0$ 时，例如取 $F_2=[u(t)]^2$，則任取初始函数 $u(t)=\varphi(t)$，$0\leqslant t\leqslant\tau$，只要 $\varphi(t)>0$ 并单调增加，例如取 $\varphi(t)=\alpha t, \alpha>0$ 即可．于是

$$u'(\tau+)=au(\tau)+[u(\tau)]^2>0.$$

但 $u'(t)$ 当 $t\geqslant\tau$ 为連續，故知 $u'(t)$ 在 $t\geqslant\tau$ 之一小段区間有 $u'(t)>0$．以下要証：对所有 $t\geqslant\tau$ 均有 $u'(t)>0$，否則至少有 t_0 使 $u'(t)=0$．取 t_0 为 $t>\tau$ 中第一个时間使 $u'(t)=0$，則 $u(t_0)>u(t_0-\tau)>0$．另一方面有

$$0=u'(t_0)=au(t_0)-au(t_0-\tau)+[u(t_0)]^2>(u(t_0))^2>0;$$

得出矛盾，故 $u(t)$ 单調增加．由此知

$$u'(t)>F_2=[u(t)]^2,$$

故立即得到 $u(t)\to+\infty$ 当 $t\to+\infty$，于是(2.19)之显易解不稳定．

現在研究 $a<0$ 之情形．

取 $F_2=-au^2(t-\tau)$，并取初始函数

$$\varphi(t)=\eta>0, \quad 0\leqslant t\leqslant\tau (\eta \text{ 为常数}),$$

則有 $u'(\tau+)=-a\eta^2>0$．故开始时 $u(t)$ 单調增加，即有

$$u(t)>\eta \text{ 当 } \tau<t<\tau+\tau_1.$$

其次我們断言，对所有 $t>\tau$ 均有 $u(t)>\eta$．因为如有 $t_0>\tau$ 使 $u(t_0)=\eta$，取 t_0 为第一个这种值，則 $u(t_0-\tau)\geqslant\eta$．故有

$$u'(t_0)=au(t_0)-au(t_0-\tau)-au^2(t_0-\tau)\geqslant-a\eta^2>0.$$

于是当 ε 很小时将有

$$u(t_0-\varepsilon)<u(t_0)=\eta.$$

t_0 不是 $t>\tau$ 中 $u(t_0)=\eta$ 之第一个时間，这个矛盾証明了 $t>\tau$ 时有 $u(t)>\eta$.

以下要研究 $u(t)$ 当 t 很大时是否单調或振动.

首先我們断言，不存在 $t_0>\tau$，使当 $t>t_0$ 时 $u(t)$ 单調減少. 用反証法，如 t_0 存在，则因 $u(t)$单調減少，又有 $u(t)>\eta$，故 $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)$ 存在并且大于或等于 η. 由此，当 t 相当大时有 $|au(t)-au(t-\tau)|<\dfrac{-\eta^2a}{2}$. 另一方面，$-au^2(t-\tau)>-a\eta^2$，故当 t 相当大时有

$u'(t)>\dfrac{-a\eta^2}{2}>0$，这与 $u(t)$ 在 $t>t_0$ 时单調減少的假設相矛盾. 于是当 t 很大时 $u(t)$ 不能单調減少. 我們也可断言，不存在 $t_0>\tau$，使当 $t>t_0$ 时，$u(t)$ 有界但是单調增加. 因如果 $u(t)$ 有界且单調增加，則有

$$\lim_{t\to\infty}u(t)=U<-\infty,$$

故当 t 相当大，可使

$$|au(t)-au(t-\tau)|<-\frac{aU^2}{2}$$

及

$$u(t-\tau)>\frac{9}{10}U.$$

于是当 t 相当大时有

$$u'(t)>-a\left(\frac{9}{10}U\right)^2+\frac{aU^2}{2}>\frac{-aU^2}{4}>0,$$

故 $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=+\infty$，这与 U 之存在矛盾.

現在只有两种情形，卽 $u(t)$ 当 t 很大为无界单調增加或为振动. 如为无界单調增加，則得不稳定性. 故我們只要証明振动的时候也有 $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=+\infty$，卽証完本定理.

前已証明当 $t>\tau$ 有 $u(t)>\eta$. 現以 t_i 表示 $u(t)$ 在 $t>\tau$ 之相对极小值所取之时間，则由

$$0 = u'(t_i) = au(t_i) - au(t_i - \tau) - au^2(t_i - \tau)$$

有 $u(t_i) = u(t_i - \tau) + u^2(t_i - \tau) \geqslant \eta + \eta^2$. 这便表明了，由第一个相对极小值 $u(t_i)$ 起，当 $t > t_0 > \tau$，則有 $u(t) > \eta + \eta^2$.

現在考慮 $t > t_0 + \tau$，則所有的相对极小值为

$$0 = u'(t_i) = au(t_i) - au(t_i - \tau) - \\ - a(u(t_i - \tau))^2,$$

故

$$u(t_i) = u(t_i - \tau) + (u(t_i - \tau))^2 \geqslant (\eta + \eta^2) + \\ + (\eta + \eta^2)^2 = (\eta + \eta^2)(1 + \eta + \eta^2).$$

任取其中一点为 t_1，則当 $t > t_1$ 有

$$u(t) \geqslant (\eta + \eta^2)(1 + \eta + \eta^2).$$

同理，考慮 $t > t_1 + \tau$ 中之 $u(t)$ 之相对极小值，則得当 $t > t_2$，

$$u(t) \geqslant (\eta + \eta^2)(1 + \eta + \eta^2) + [(\eta + \eta^2)(1 + \eta + \eta^2)]^2.$$

現在只需要証明，若

$$S_0 = \eta > 0,\ S_1 = S_0 + S_0^2,\ S_2 = S_1 + S_1^2, \cdots \\ \cdots, S_n = S_{n-1} + S_{n-1}^2,$$

必有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ 卽可．事实上可証

$$S_n \geqslant \eta(1 + \eta)^n,$$

这可由归納法証之．当 $n=0$ 时这是成立的． 現設 $n \geqslant 0$ 有 $S_n \geqslant \eta(1 + \eta)^n$，則

$$S_{n+1} \geqslant \eta(1 + \eta)^n + [\eta(1 + \eta)^n]^2 \geqslant \eta(1 + \eta)^n[1 + \eta] = \\ = \eta(1 + \eta)^{n+1}.$$

卽当 $n \to \infty$，因 $\eta > 0$ 有 $S_n \to \infty$．定理 6 証毕．

§4. 簡单的总結

方程

$$u'(t) = au(t) + bu(t - \tau) + F_2(u(t), u(t - \tau))$$

与方程

$$u'(t) = (a + b)u(t) + F_2(u(t), u(t))$$

在稳定性方面的等价性可述之如下：

当 $a + b > 0$，則对任何 $\tau > 0$，两方程的显易解均为不稳定，

即两者的不稳定性是等价的；

当 $a+b<0$，则有 $\Delta=\Delta(a,b)>0$ 存在，使当 $0<\tau<\Delta$，两方程之显易解均为稳定，即在 $0<\tau<\Delta$ 时，两者的稳定性是等价的；

当 $a+b=0$ 时，则有 $\Delta=\Delta(a,b)>0$ 存在，使当 $0<\tau<\Delta$，又 $F_2\equiv 0$，则两方程之显易解均为稳定，即在 $0<\tau<\Delta$，$F_2\equiv 0$，两者的稳定性是等价的；又可取 F_2 使得对任何 $\tau>0$，两方程之显易解均为不稳定。

第四章　小时滞系統的运动稳定性(一般情形)

§1. 綫性系統的稳定情形[19]

考虑微分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1.1}$$

与微分差分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j(t)+b_{ij}x_j(t-\tau_{ij}(t)))$$

$$i=1,2,\cdots,n\tag{1.2}$$

之間在稳定性間題中的等价性，此处 a_{ij}, b_{ij} 均为常数，$\tau_{ij}(t)$ 或为非負的实常数，或为非負的实連續函数。

方程組(1.1)及(1.2)的特征方程分别为

$$D(\lambda)\equiv|a_{ij}+b_{ij}-\delta_{ij}\lambda|=0\tag{1.3}$$

及

$$D(\lambda;\tau)\equiv|a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau_{ij}}-\delta_{ij}\lambda|=0,\tag{1.4}$$

而方程組(1.2)还可写成另一形式：

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}(t))-x_j(t))=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t)+\psi_i(t)$$

$$(i=1,2,\cdots,n).\tag{1.2'}$$

当 $\tau(t)$ 等相当小时，$\psi_i(t)$ 可以看做微小扰动.

引理 1.　設 (1.3) 的所有根的实部为負，则存在两个正数

$\Delta=\Delta(a_{ij}, b_{ij})>0$ 及 $\varepsilon=\varepsilon(a_{ij}, b_{ij})>0$，使当 $0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\Delta$ $(j=1, 2, \cdots n)$ 时，则(1.4)的所有根 λ 为满足关系

$$\operatorname{Re}(\lambda)\leqslant-\varepsilon.$$

證. (1.3)只有 n 个根，設它們的实部的最大值是 $L, L<0$，則不妨取 $\varepsilon=-\frac{L}{2}$，并进一步来决定 Δ 如下.

(1.4)式可以写成 λ 之 n 次多項式:

$$\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\cdots+A_n=0, \tag{1.4$'$}$$

其系数 A_i 为 $e^{-\lambda\tau_{ij}}$ 及 a_{ij}, b_{ij} 之多項式.

在条件

$$\operatorname{Re}(\lambda)\geqslant 0, \quad \tau_{ij}\geqslant 0 \tag{1.5}$$

下，知 $|e^{-\lambda\tau_{ij}}|\leqslant 1$，故在(1.5)之条件下，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有界，以 K_1 記之:

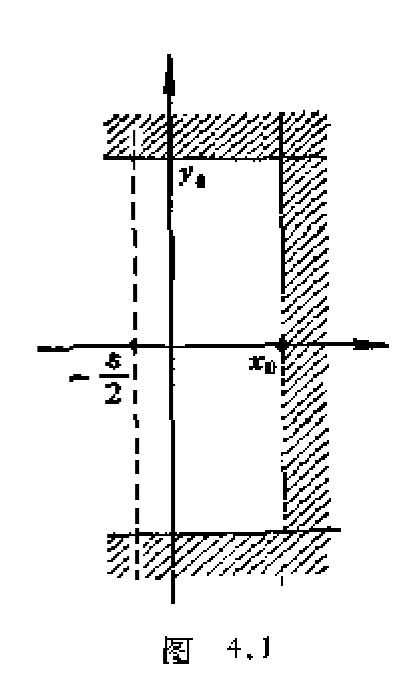


图 4.1

$$K_1=\max_{i=1,2,\cdots n}|A_i| \quad 当 \operatorname{Re}(\lambda)\geqslant 0$$

及

$$\tau_{ij}\geqslant 0.$$

取 $x_0=\max(1, (n+1)K_1)>0$，

則当

$$\operatorname{Re}(\lambda)\geqslant x_0, \tag{1.6}$$

由

$$|\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\cdots+A_n|\geqslant$$
$$\geqslant|\lambda|^n\left[1-\frac{|A_1|}{|\lambda|}-,\cdots,-\frac{|A_n|}{|\lambda|^n}\right]\geqslant|x_0|^n\left[1-\frac{nK_1}{(n+1)K_1}\right]>0$$

知(1.4)$'$无根. 类似地，在条件

$$\operatorname{Re}(\lambda)\geqslant-\varepsilon, \ 1\geqslant\tau_{ij}\geqslant 0 \tag{1.7}$$

下 $|e^{-\lambda\tau_{ij}}|\leqslant e^{\varepsilon}$，故在(1.7)之条件下，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有界，以 K_2 記之:

$$K_2=\max_{i=1,2,\cdots n}|A_i| \ 当 \ \operatorname{Re}(\lambda)\geqslant-\varepsilon \ 及 \ \tau_{ij}\geqslant 0.$$

取

$$y_0=\max(1, (n+1)K_2)>0,$$

則当

$$\operatorname{Re}(\lambda)\geqslant-\varepsilon, \ |\operatorname{Im}(\lambda)|\geqslant y_0, \tag{1.8}$$

有

$$|\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n| \geqslant |\lambda|^n\left[1 - \frac{nK_1}{(n+1)K_2}\right]$$

$$> |y_0|^n\left[1 - \frac{nK_2}{(n+1)K_2}\right] > 0,$$

亦即(1.4)′无根.

現在要研究

$$S:\ -\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant x_0,\ |\mathrm{Im}(\lambda)| \leqslant y_0 \tag{1.9}$$

这一矩形中的情形,其中

$$D(\lambda, \tau) = D(\lambda) + R(\lambda, \tau),$$

$$R(\lambda, 0) \equiv 0,\ \text{对任何}\ \lambda.$$

由假定知 $D(\lambda) = 0$ 之根均在 $\mathrm{Re}(\lambda) < -2\varepsilon$,故在 S 中及边上 $D(\lambda) \neq 0$.

記

$$m = \min_{\lambda\text{在}S\text{边上}} |D(\lambda)| > 0,$$

則由 $R(\lambda, \tau)$ 对 λ 及 τ_{ij} 之連續性,有 $\Delta > 0$. Δ 如此小(不妨取 $\Delta < 1$)使当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta, \tag{1.10}$$

有

$$\max_{\lambda\text{在}S\text{边上}} |R(\lambda, \tau)| < m.$$

因此对 S 边界上满足(1.10)之 τ_{ij},用儒歇(Rouche)定理知道 $D(\lambda, \tau) = 0$ 在 S 中之根之个数与 $D(\lambda) = 0$ 在 S 中之根之个数相同. 而 $D(\lambda) = 0$ 在 S 中无根,故 $D(\lambda, \tau) = 0$ 亦如此.

合并(1.6),(1.8)及(1.9)卽得引理 1. 由引理 1 及伯尔曼定理卽可得到

定理 1. 設方程組(1.1)之零解是漸近稳定的,則存在一正数

$$\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0,$$

使当 $\tau_{ij}(t)$ 为常数,并且 $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta$ 时,方程(1.2)之零解是漸近稳定的.

定理 2. 設方程組(1.1)之零解是漸近稳定的,則存在一正数 $\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0$,使当 $\tau_{ij}(t)$ 满足

$$0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta, \tag{1.11}$$

$\tau_{ij}(t)$ 为 t 之連續函数时，方程(1.2)之零解也是漸近稳定的.

証. 由假定方程組(1.1)是漸近穩定的，故存在二次型的正定函数 $V(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{ij=1}^{n}c_{ij}x_ix_j$，使得对方程組(1.1)，

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j\right)=$$
$$=W(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(1.12)$$

是負定的.

現对方程組(1.2)来作函数 V 关于 t 的全导数，由(1.12)得

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=W(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i,\qquad(1.13)$$

現考慮最后一項：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+c_{ji})x_j(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}(t))-x_j(t))\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+c_{ji})x_j(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(-\tau_{ij}(t))\frac{dx_j(\xi_{ij})}{dt}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+c_{ji})x_j(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(-\tau_{ij}(t))\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{l=1}^{n}(a_{jl}x_l(\xi_{ij})+b_{jl}x_l(\xi_{ij}-\tau_{ij}(\xi_{ij})))\right),$$

这里

$$t-\tau_{ij}(t)\leqslant\xi_{ij}\leqslant t,\ t-2\tau_{ij}(t)\leqslant\xi_{ij}-\tau_{ij}(t)\leqslant t.\qquad(1.14)$$

令

$$U(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}(|c_{ij}|+|c_{ji}|)|x_j|\right]\times$$
$$\times\left[\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\sum_{l=1}^{n}(|a_{jl}|+|b_{jl}|)|x_l|\right],\qquad(1.15)$$

则 $U(x_1, \cdots, x_n)$ 永为正定的二次型(当所有的 $b_{ij} \neq 0$)。

由于 $V(x_1, \cdots, x_n)$正定，$W(x_1, \cdots, x_n)$是負定的二次型，故存在一正数

$$m_1 = \min_{V=1} |W(x_1, \cdots, x_n)| > 0,$$

亦即

$$W \leqslant -m_1 V. \tag{1.16}$$

由于 $U(x_1, \cdots, x_n)$是正定的二次型，故存在一正数

$$m_2 = \max_{V=1} |U| > 0.$$

如果 b_{ij} 中有一个为 0，则上述的 m 亦可取到（否則当 $m_2 = 0$ 时，命題就不必証，因为此时 $U \equiv 0$，亦即 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \psi_i \equiv 0$。故沒有差分項了），

亦即

$$U \leqslant m_2 V(x_1, \cdots, x_n). \tag{1.17}$$

取

$$\Delta = \frac{m_1}{4m_2} > 0, \tag{1.18}$$

如果有 $0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta$，并且設在 $\xi - 2\Delta \leqslant t \leqslant \xi$ 中

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \leqslant 2V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)), \tag{1.19}$$

则在 $t = \xi$，由(1.13)—(1.19)

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=\xi} &= W(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \psi_i \leqslant \\
&\leqslant -m_1 V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)) + \Delta \cdot U \leqslant \\
&\leqslant -m_1 V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)) + \Delta \cdot m_2 V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \leqslant \\
&\leqslant -m_1 V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)) + \Delta \cdot 2m_2 V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)) \\
&= -\frac{m_1}{2} V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)).
\end{aligned}$$

总結可得：如果在 $\xi - 2\Delta \leqslant t \leqslant \xi$ 有关系式(1.19)，则在 $t = \xi$ 时有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=\xi} \leqslant -\frac{m_1}{2} V\Big|_{t=\xi}. \tag{1.20}$$

不等式(1.20)便可用来証明我們的定理.

对任何 $\varepsilon > 0$, 只要在 $-2\Delta \leqslant t \leqslant 0$ 中初始函数 $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 滿足不等式 $V(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \leqslant \varepsilon$, 則可断言此后 $t \geqslant 0$ 均有

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \leqslant \varepsilon. \tag{1.21}$$

这可反証之, 如果 (1.21) 不成立, 則 $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 可穿出 $V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \varepsilon$ 之外. 不妨設第一个穿出之点在 $t=\xi$, 則当 $t < \xi$ 时就有

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon = 2V(x_1(\xi), \cdots, x_n(\xi)),$$

則由(1.20)知在 $t = \xi$, $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=\xi} \leqslant -\frac{m_1}{2}\varepsilon < 0$, 故 t 加大时 V 減少, 因此 $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$不能穿出 $V = \varepsilon$ 之外, 由此导出矛盾.

(1.21)表示了穩定性, 但我們还要进一步証明漸近穩定性.

不等式(1.19)及(1.20)还可得出另一結論: 当 $t \geqslant 0$,

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \leqslant \frac{1}{2} \max_{t-2\Delta \leqslant u \leqslant t} V(x_1(u), \cdots, x_n(u)). \tag{1.22}$$

因此

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\to\infty}} V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) &\leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \max_{t-2\Delta \leqslant u \leqslant t} V(x_1(u), \cdots, x_n(u)) = \\ &= \frac{1}{2} \overline{\lim_{t\to\infty}} V(x_1(t), \cdots, x_n(t)),\end{aligned}$$

但已知在 $-2\Delta \leqslant t \leqslant 0$ 时, 如果 $V(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \leqslant \varepsilon$, 則 (1.21)成立. 故

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = L < +\infty, \ 0 \leqslant L \leqslant \frac{1}{2} L,$$

$L = 0$ 即 $\lim\limits_{t\to\infty} V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = 0$, 亦即

$$\lim_{t\to+\infty} (x_1^2(t) + \cdots + x_n^2(t)) = 0.$$

定理 2 証毕.

定理 1 及 2 均为[1]中定理 1 的推广, 但用了两种另外的方法避免了原証中的困难.

§2. 綫性系統的不稳定情形

引理 2. 設(1.3)至少有一个根具有正实部,則存在一正数

$$\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0,$$

使当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \quad (i, j = 1, 2, \cdots n),$$

則(1.4)至少有一个根具有正实部.

証. 主要是用儒歇定理. 任取(1.3)的一个具有正实部之根 λ_0:

$$\operatorname{Re}(\lambda_0) = \eta > 0.$$

以λ_0为心、$\frac{\eta}{m}$为半径作一个圓Γ, m为正整数, m取如此大,使在Γ边上(1.4)不存在零点. 現取Δ如此小,使当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \quad (i, j = 1, 2, \cdots n),$$

$$\max_{\lambda \text{在} \Gamma \text{上}} |R(\lambda; \tau_{ij})| < \min_{\lambda \text{在} \Gamma \text{上}} |D(\lambda)|.$$

故(1.4)在Γ中之根之个数与(1.3)在Γ中的根的个数相同,因此(1.4)在Γ內至少有一个具正实部的根. 引理 2 証毕.

由引理 2 立即得到

定理 3. 如果(1.3)至少有一个具正实部的根,(1.1)的零解是不稳定的,則必存在一个正数

$$\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) > 0,$$

使当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \quad (i, j = 1, 2, \cdots n),$$

則(1.2)的零解是不稳定的.

定理 4. 在定理 3 中,若省去$\tau_{ij}(t)$为常数的假定,而定理仍成立,只要$0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \Delta$即可.

証. 現在設(1.3)至少有一个具有正实部的根,分别两种情形研究之:

(甲)一种情形是所有特征根的实部均相等,

(乙)一种情形是至少有两个特征根其实部不相等.

以下分別証明之。

（甲）設共同的实部是 $\lambda>0$，將方程組(1.2)写成(1.2)′，經过非奇异的綫性变換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},\ \text{这里} |c_{ij}| \neq 0\ (i, j=1, 2, \cdots n)$$

可以將(1.2)′化为約当型

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_n(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

此地 M_i 是

$$\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & \mu & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\mu & \lambda & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \end{pmatrix}$$

形。

引入函数 $V=V(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2$，則对(2.1)作 $\frac{dV}{dt}$ 有

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \xi_i}\frac{d\xi_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}2\xi_i\frac{d\xi_i}{dt}=\lambda V+2\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\psi}_i(t).$$

現在研究尾項 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\psi}_i(t)$，这里 $\bar{\psi}_i(t)$ 是 $\psi_i(t)$ 的綫性組合。故 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\psi}_i$ 將如（1.15）的形式，因此亦如定理 2 的証法，对于 $0\leqslant\tau_{ij}(t)\leqslant\Delta$，如果在

$$t_1-2\Delta\leqslant t<t_1 \quad (2.2)$$

有

$$V(t) \leqslant 2V(t_1),$$

則可得出

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\varPhi}_i(t)\right| \leqslant \Delta KV(t_1),$$

此地K为某常数，只与 a_{ij} 及 b_{il} 有关. $K > 0$，取 $\Delta \leqslant \frac{\lambda}{4K} > 0$，則在条件(2.2)下，在 $t = t_1$ 有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} \geqslant \lambda V(t_1) - 2\Delta KV(t_1) = \frac{\lambda}{2} V(t_1). \tag{2.3}$$

由不等式(2.3)可以立即推出不稳定性，因对初值如取

$$V(t) = \eta(t + 2\Delta) > 0, \quad -2\Delta \leqslant t < 0,$$

η 可任意小，則(2.2)被滿足，故由(2.3)有 $\frac{dV}{dt} > 0$. 于是 $V(t)$ 单調增加，并以 $V(t) \geqslant V(t_0)e^{\frac{1}{2}\lambda(t-t_0)}$ 的指数函数增加.

如果(2.3)遭到破坏則必須(2.2)遭到破坏，設第一个破坏(2.2)之点在 t_2，这便要有 $t_1 < t_2$ 且

$$V(t_1) = 2V(t_2),$$

这便表示在 $t < t_2$ 时，$V(t)$ 已不是单調的，因而 t_2 不是第一个破坏(2.2)之点，由此得出矛盾，(甲)之情形証毕.

(乙) 設 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 为对应于特征根有实部为 λ_1 的变量，$\xi_{m+1}, \cdots, \xi_n$ 为对应于特征根有实部小于 $\lambda_2(< \lambda_1)$ 的变量，由假設必有 $\lambda_1 > 0$.

引入两个新变量

$$X = \xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2,$$
$$Y = \xi_{m+1}^2 + \cdots + \xi_n^2,$$

則有

$$\frac{dX}{dt} \geqslant \lambda_1 X - \varepsilon \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqslant i, j \leqslant m}} |\xi_i||\xi_j| - \sum_{i=1}^{m} |\xi_i||\bar{\varPhi}_i(t)|,$$

$$\frac{dY}{dt} \leqslant \lambda_2 Y + \varepsilon \sum_{\substack{i \neq j \\ m+1 \leqslant i, j \leqslant n}} |\xi_i||\xi_j| + \sum_{i=m+1}^{n} |\xi_i||\bar{\varPhi}_i(t)|.$$

现在在 $0 \leqslant Y \leqslant X \leqslant L$($L$ 某正常数)中来考虑，则对任何取定的 $\varepsilon > 0$，则可有 $\Delta > 0$，使得如果条件

$$0 \leqslant Y(t_1) \leqslant X(t_1) \leqslant 2 \max_{t_1 - 2\Delta \leqslant t \leqslant t_1} X(t) \qquad (*)$$

满足时，则

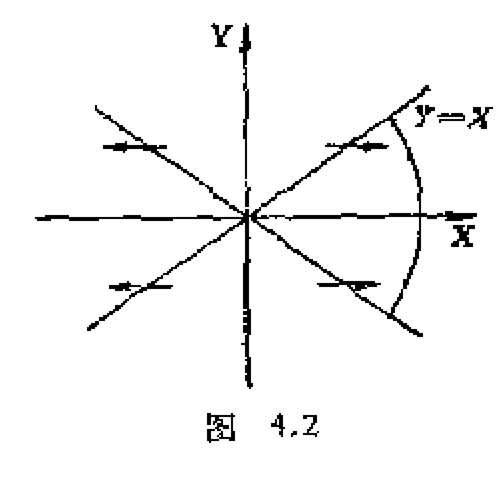


图 4.2

$$\sum_{i=1}^{m} |\xi_i(t)| |\overline{\varphi}_i(t)| \leqslant \varepsilon X(t),$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} |\xi_i(t)| |\overline{\varphi}_i(t)| \leqslant \varepsilon X(t);$$

于是在条件($*$)下，有

$$\frac{dX}{dt} \geqslant \lambda_1 X - 2\varepsilon X,$$

$$\frac{dY}{dt} \leqslant \lambda_2 Y + 2\varepsilon X.$$

现在研究在 $X = \pm Y > 0$ 的边上，只要 $\left|\frac{\lambda_2 + 2\varepsilon}{\lambda_1 - 2\varepsilon}\right| < 1$，就有

$$-1 < \frac{dY}{dX} < +1.$$

这是可能的，因为 $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$，故取 $\varepsilon = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{5}$ 即可。于是 $X = \pm Y > 0$ 边上有

$$\frac{dX}{dt} \geqslant (\lambda_1 - 2\varepsilon)X > 0, \quad \left|\frac{dY}{dX}\right| < 1,$$

故向量箭头指向 $X > Y$ 区中，而在 $0 \leqslant Y \leqslant X \leqslant L$ 内则有

$$\frac{dX}{dt} \geqslant (\lambda_1 - 2\varepsilon)X > 0.$$

故在条件

($*$)：$0 \leqslant Y \leqslant X \leqslant L$ 和在 $t_1 - 2\Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 以及 $0 \leqslant Y(t) \leqslant X(t) < 2 \max_{t - 2\Delta \leqslant t_1 \leqslant t} X(t)$ 下可保証得

$$\frac{dX}{dt} > 0.$$

为此我們取初值：

$$Y(t) = 0 \quad (-2\Delta \leqslant t \leqslant 0),$$
$$X(t) = \eta(t + 2\Delta), \quad \eta > 0,$$

η 可任意小，則条件(＊)$_1$滿足．这时 $X(t)$ 单調增加，并且要破坏 $X(t) \geqslant X(0)e^{(\lambda_1-2\varepsilon)t}$ 这个增長率必須破坏上述两条件之一．但是

$$0 \leqslant Y \leqslant X \leqslant L$$

不能在边上 $0 < Y = X < L$ 处破坏，因为向量場向內，只可能在 $X = L$ 处破坏．这时得到不稳定情形．在条件 $t_1 - 2\Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 中要破坏

$$X(t) < 2X(t_1),$$

則第一点破坏的点設在 t_0，在 $t_0 - 2\Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 中有 t_2，使 $X(t_2) = 2X(t_1)$，則在 $t_2 \leqslant t \leqslant t_1$ 中 $\dfrac{dX}{dt}$ 可能是正的．因而得出矛盾．

引理 3. 設 $D(0)$ 与 $(-1)^n$ 异号，亦即(1.3)有奇数个具正实部的根，但 $\lambda = 0$ 不是(1.3)的根，則对任何实数組 $\tau_{ij} \geqslant 0(i, j = 1, 2, \cdots n)$，方程(1.4)至少有一个根具正实部．

証．$D(0, \tau_{ij}) = D(0)$，$D(0;\tau_{ij})$ 与$(-1)^n$反号．$D(+\infty; \tau_{ij}) \sim \lim\limits_{\lambda\to\infty}(-1)^n\lambda^n$，故 $D(0; \tau_{ij})$与$D(+\infty; \tau_{ij})$反号，$(i, j = 1, 2, \cdots n)$．因而至少有一个正实根．

定理 5. 設 $D(0)$ 与 $(-1)^n$ 异号，此时知(1.1)之零解是不稳定的，則不論 τ_{ij} 为何非負实数，(1.2)的零解也不稳定．

这由引理 3 立即可得出(1.4)有一正实根 λ，于是当 $t \to +\infty$ 时，有解趋于 $+\infty$．故得不稳定．

在 $n = 1$ 时，对不稳定的情形 $\Delta = +\infty$，即对任何 $\tau_{ij} \geqslant 0$，仍得到不稳定．現在定理 5 只对有奇数个具正实部的根的情形，$\Delta = +\infty$．至于有偶数具正实部的根的情形，則 Δ 不一定为 $+\infty$．下面举出反例，即 $\tau_{ij} = 0$ 时为不稳定，而当 $\tau_{ij} > 0$ 足够大时反而变为稳定之例．現作一二阶方程組

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t) + K(y(t) - y(t-\tau)) + \varepsilon x(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -x(t) - K(x(t) - x(t-\tau)) + \varepsilon y(t),$$

ε 为常数,则特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda + \varepsilon & 1 + K(1 - e^{-\tau\lambda}) \\ -1 - K(1 - e^{-\tau\lambda}) & -\lambda + \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)_2$$

或
$$(-\lambda + \varepsilon)^2 + [1 + K(1 - e^{-\tau\lambda})]^2 = 0,$$
$$\lambda = \varepsilon \pm i\sqrt{1 + K(1 - e^{-\tau\lambda})^2}.$$

当 $\tau = 0$ 时有 $\lambda = \varepsilon \pm i$, 故当 $\varepsilon > 0$ 为不稳定, $\varepsilon < 0$ 为稳定. 現对 $(*)_2$ 微分之,有

$$2(-\lambda + \varepsilon)\left(-\frac{d\lambda}{d\tau}\right) + 2[1 + K(1 - e^{-\tau\lambda})] \times$$
$$\times (Ke^{-\lambda\tau})\left(\lambda + \tau\frac{d\lambda}{d\tau}\right) = 0;$$

故有

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{-[1 + K(1 - e^{-\tau\lambda})]Ke^{-\lambda\tau}\lambda}{(\lambda - \varepsilon) + \tau[1 + K(1 - e^{-\tau\lambda})]Ke^{-\tau\lambda}}.$$

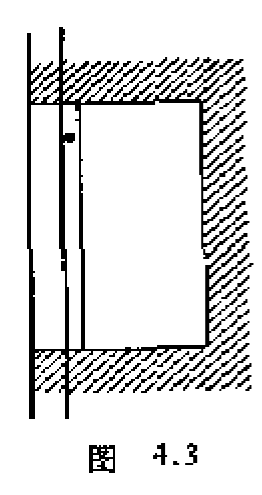


图 4.3

可以确定常数 $A > 0$ 及 $\eta > 0$, 使在区域 $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant A$ 及区域 $\begin{matrix}\mathrm{Im}(\lambda) \geqslant A \\ \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant -\eta\end{matrix}$ 中对任何 $\tau \geqslant 0 (*)_2$ 之 λ 无根. 现当 $\tau = \varepsilon = 0$,

$\frac{d\lambda}{d\tau} = -K$, 由連續性有 $\varepsilon_1 > 0$ 及 $\tau_1 > 0$, 使当 $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, $|\tau| < \tau_1$ 时在区域 $\begin{matrix}|\mathrm{Im}(\lambda)| \leqslant A \\ |\mathrm{Re}(\lambda)| \leqslant \varepsilon_1\end{matrix}$ 中

有
$$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) < -\frac{K}{2} \quad (\text{当 } K > 0),$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) > -\frac{K}{2} \quad (\text{当 } K < 0).$$

故有一有限时間，例如 $\frac{\tau_1}{2}$，速度在 $-\frac{K}{2}$ $(K>0)$，則 $\mathrm{Re}(\lambda)$要跑过 $\frac{\tau_1}{2}\left(\frac{K}{2}\right)>\frac{\varepsilon_1}{m}$，$m$ 为一足够大的正整数，故可取

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{m}.$$

即由不稳定性变成了稳定，此时不穩定性的时差有限制。

关于 $n=1$ 时不穩定的情形，还可以推广到下面的变时滯的情形。

定理 6. 已給一微分差分方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)+bx(t-\tau(t)) \tag{2.4}$$

满足条件 (i)$a+b>c$，(ii)$\tau(t)$是非負有界实連續函数 $0\leqslant\tau(t)\leqslant\Delta$，則方程(2.4)的零解是不穩定的。

証. $b=0$ 时不需証明，故設 $b\neq0$. 以下分别 $a=0$ 及 $a\neq0$ 証明之。

(甲) $a=0$. 方程化为

$$\frac{dx(t)}{dt}=bx(t-\tau(t)),\quad b>0.$$

取初值 $x(t)=\eta>0$，$-\Delta\leqslant t\leqslant0$ (η 可任意小)，則 $x(t)$ 显然是单調增加的，只要証其无界即可(用反証法)。

如果 $x(t)$ 有界，則有极限 $x(t)\to x(\infty)>0$，当 $t\to\infty$. 因 $|\tau(t)|\leqslant\Delta$，故也有 $x(t-\tau(t))\to x(\infty)>0$，当 $t\to\infty$. 由此 $bx((t-\tau(t))\to bx(\infty)>0$. 亦即 $x(t)\sim bx(\infty)$，$t\to\infty$. 这便得出 $x(t)$ 无界，故 $a=0$. 証毕.

(乙) $a\neq0$. 由于 $a+b>0$，故有三种可能情形，今分别証明之。

(乙)$_1$ $a>0$, $b>0$; (乙)$_2$ $a>0$, $b<0$; (乙)$_3$ $a<0$, $b>0$.

(乙)$_1$ $a>0$, $b>0$, $a+b>0$. 則方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)+bx(t-\tau(t))$$

可与方程

$$\frac{dz(t)}{dt} = bz(t-\tau(t))$$

比較．取同样的初值 $x(t) = z(t) = \eta > 0$，当 $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$，則可見

$$x(t) \geqslant z(t) > 0.$$

由(甲)知 $z(t) \to +\infty$，故 $x(t) \to +\infty$.

(乙)$_2$ $a > 0, b < 0, a + b > 0$，故 $a > -b > 0$.

取 $x(t)$ 的初值为正的、連續的、严格单調增加的，但小于某一已給正数 η 的函数，例如在 $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$ 中取

$$x(t) = \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2}\left(\frac{-\Delta - t}{-\Delta}\right),$$

則因 $ax(t) + bx(t-\tau(t)) = ax(t)\left[1 + \frac{b}{a}\frac{x(t-\tau(t))}{x(t)}\right]$，而 $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$，$x(t) > x(t-\tau(t))$，故在 $t > 0$ 时有一段时間 $\frac{dx(t)}{dt} > 0$. 从而得到 $x(t)$ 严格单調增加.

現在可进一步断言，对所有的 $t \geqslant 0$，$\frac{dx}{dt} > 0$. 如其不然，則有某一 $t_1 > 0$，$\frac{dx(t_1)}{dt} > 0$. 而在 $-\Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 中 $x(t)$ 严格单調增加，而在 $t = t_1$ 有

$$0 = \frac{dx(t_1)}{dt} = ax(t_1) + bx(t_1 - \tau(t_1)) > ax(t_1) -$$
$$- |b|\,|x(t_1)| = x(t_1)[a - |b|] =$$
$$= x(t_1)(a+b) > 0.$$

故矛盾，因此 $\frac{dx(t)}{dt} > 0$ 对所有的 $t \geqslant 0$ 成立.

由于 $x(t)$ 严格单調增加，这又可分为两种情形，即 $x(t)$ 有界与 $x(t)$ 无界. 对 $x(t)$ 有界的情形，則又有极限，故又将导出矛盾. 因此 $x(t)$ 无界. 从而得到不穩定性.

(乙)$_3$ $a < 0, b > 0, a + b > 0$，故 $b > -a > 0$.

取初値为 $x(t)=\eta>0, -\Delta\leqslant t\leqslant 0$，則首先断言这个解恆正用反証法. 設在 $t_1>0, x(t_1)=0$, t_1 为第一个零点，則又可分两种情形研究之，卽

$$\text{当}\quad t\to t_{1-0},\quad x(t)\text{单調接近于零；}$$

$$\text{当}\quad t\to t_{1-0},\quad x(t)\text{振动接近于零.}$$

对单調接近于零之情形，当 t 充分接近于 t_{1-0} 有

$$0<x(t)<x(t-\tau(t)).$$

故

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)+bx(t-\tau(t))=$$

$$=bx(t-\tau(t))\left[1+\frac{a}{b}\frac{x(t)}{x(t-\tau(t))}\right]>0$$

$$\left(\text{因 } b>0,\ x(t-\tau(t))>0,\ \left|\frac{a}{b}\right|<1,\right.$$

$$\left.\left|\frac{x(t)}{x(t-\tau(t))}\right|\leqslant 1\right),$$

卽 $\dfrac{dx}{dt}>0$. 当 t 接近于 t_1，在 t_1 附近 $x(t)$ 不能单調减少并接近于零.

其次，对于 $x(t)$ 振动接近于零也可推出矛盾如下：

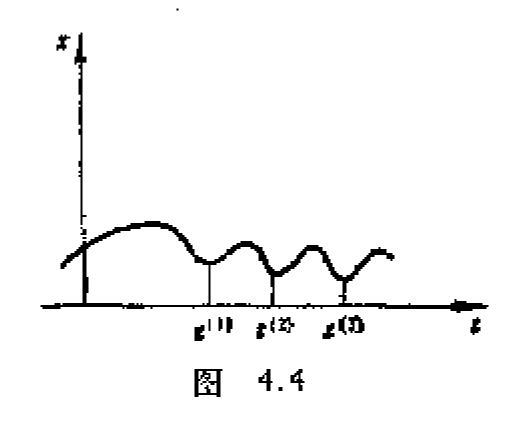
以 $m_1, m_2, \cdots, m_n, \cdots$ 記 $x(t)$ 的第 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 个相对最小值，其时間为 $t^{(1)}, t^{(2)}, \cdots, t^{(n)}, \cdots$，則在 $t^{(n)}$ 有

$$0=\frac{dx(t^{(n)})}{dt}=ax(t^{(n)})+bx(t^{(n)}-\tau(t^{(n)})),$$

而 $x(t^{(n)})>0$, $b>-a>0$，故 $\tau(t^{(n)})\neq 0$（否則 $0=ax(t^{(n)})+$ $+bx(t^{(n)})=(a+b)x(t^{(n)})>0$，矛盾）. 由此可見

$$m_n=x(t^{(n)})=-\frac{b}{a}x(t^{(n)}-\tau(t^{(n)}))\geqslant-\frac{b}{a}\min_{t^{(n)}-\Delta\leqslant t\leqslant t^{(n)}}x(t).$$

注意到 $-\dfrac{b}{a}>1$，故对 m_1 而言，在 $t<t^{(1)}$ 还有 $x(t)>x(t^{(1)})$，这


图 4.4

表示：

$$m_1 \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\eta,$$

$$m_2 \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\min[m, \eta] =$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)\eta,$$

$$m_3 \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\min[m_1, m_2, \eta] = \left(-\frac{b}{a}\right)\eta\cdots,$$

…………………………………………

$$m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\eta > 0.$$

故 $x(t)$ 不能趋于零，由此亦知 $x(t)$ 也不能振动趋于零。

上述推理对于 $t_1 = +\infty$ 也可用，亦即 $x(t)$ 不能单调减少趋于零，也不能振动趋于零，并且当 $x(t)$ 振动时 $x(t)$ 有正下界。

现在分三种情形再詳細研究 $x(t)$：(a) $x(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时单調減少；(b) $x(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时单調增加；(c) $x(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时振动。

(a) 是不可能的，因此时 $x(t)$ 有正下界，则

$$0 = \lim_{t\to\infty}\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty}[ax(t) + bx(t-\tau(t))] =$$

$$= (a+b)x(\infty) > 0.$$

(b) $x(t)$ 必无界，否則也有极限。可如 (a) 得矛盾，这时得到不稳定。

(c) 此时只要証 $m_n \to +\infty$ 即可。

由 $m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\min\limits_{t^{(n)}-\Delta\leqslant t\leqslant t^{(n)}} x(t)$ 知 $m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\eta$，故

$$x(t) \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\eta, \text{ 当 } t \geqslant t'.$$

以 $t' \leqslant t \leqslant t' + \Delta$ 为初始条件(即用 $\left(-\frac{b}{a}\right)\eta$ 代 η)，则对大

于 $t'+\Delta$ 之 $t^{(n)}$ 有

$$m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(-\frac{b}{a}\right)\eta\right] = \left(-\frac{b}{a}\right)^2\eta,$$

故

$$\varliminf_{t\to\infty} m_n \geqslant \left(-\frac{b}{a}\right)^K \eta,\ K\text{ 为任意大之正整数.}$$

又 $-\dfrac{b}{a} > 1$，故 $\varliminf_{n\to\infty} m_n = +\infty$，

所以
$$\lim_{n\to\infty} m_n = +\infty.$$

因此在情形(c)也得到不稳定。定理5証毕。

注意这个定理的条件(i)(ii)均不可减去。(i)是显然的，而(ii)如减弱为 $\tau(t)$ 非負实連續函数，則例如取 $\tau(t)=t$，方程化为

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(0).$$

这时如果 $a<0$，$b>0$，$a+b>0$，則得到零解是稳定的。

§3. 非綫性系統

定理 7. 設方程組(1)是漸近稳定的。給定一个非綫性系統：

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}x_j(t) + b_{ij}x_j(t-\tau_{ij}(t))\right) + $$
$$+ F_2^{(i)}(x(t),\ x(t-\tau(t)))\ (i=1,2,\cdots n),\tag{3.1}$$

此地

$$F_2^{(i)} = \sum_{\Sigma(l_j+m_j)\geqslant 2} p_i^{(l_1\cdots l_n m_1\cdots m_n)} x_1^{l_1}(t),\cdots,$$
$$x_n^{l_n}(t)\,x_1^{m_1}(t-\tau_{i_1}(t)),\cdots x_n^{m_n}(t-\tau_{i_n}(t)),$$

并且有正数 $\varepsilon>0$，使

$$\sum_{\sum_{j=1}^{n}(l_j+m_j)\geqslant 2} \left|p_i^{(l_1\cdots l_n m_1\cdots m_n)}\right|\cdot \varepsilon^{l_1+\cdots+l_n+m_1+\cdots+m_n} < +\infty,$$

則必存在一正数 $\Delta=\Delta(a_{ij},b_{ij},F_2^{(i)})>0$，使当 $0\leqslant\tau_{ij}(t)\leqslant\Delta$ 时，(3.1)的零解漸近稳定。

証明亦如定理 2，这时只要取

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=W(x_1,\cdots,x_n)+$$

$$+\sum\frac{\partial V}{\partial x_i}\psi_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}F_i^{(2)},$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}F_2^{(i)}(x(t),x(t-\tau(t)))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}F_2^{(i)}(x(t),\,x(t))+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}[F_2^{(i)}(x(t),$$

$$x(t-\tau(t)))-F_2^{(i)}(x(t),\,x(t))]=W_1+W_2.$$

在 $|x_i(t)|$ 足够小时可使 $|W_1|\leqslant\frac{m_1}{8}V$. 当 $|\tau_{ij}(t)|<\Delta$ 足够小时，可使 $|W_2|\leqslant\frac{m_2}{2}V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 在 $\xi-2\Delta\leqslant t\leqslant\xi$ 中成立. 由此可知

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=\xi}\leqslant-m_1V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi))+$$

$$+\frac{m_1}{8}V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi))+\Delta\left(2m_2+\frac{m_2}{2}\right)V(x_1(\xi),$$

$$\cdots,x_n(\xi))=\left(-m_1+\frac{m_1}{8}+\frac{2}{4}m_1+\frac{m_1}{8}\right)V(x_1(\xi),$$

$$\cdots,x_n(\xi))=\frac{-m_1}{4}V(x_1(\xi),\cdots,x_n(\xi)).$$

定理 8. 若 $\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)+bx(t-\tau(t))+\sum_{i+j\geqslant2}c_{ij}x^i(t)x^j(t-\tau(t))$ 满足条件

(i) $a+b>0$, a, b 为常数;

(ii) $0\leqslant\tau(t)\leqslant\Delta$, Δ 为常数;

(iii) $\sum|c_{ij}|\varepsilon^{i+j}<+\infty$, ε 为足够小之常数,

則原方程之零解不稳定.

證. 将原方程写成

$$\frac{dx(t)}{dt}=\left(a-\frac{a+b}{4}\right)x(t)+\left(b-\frac{a+b}{4}\right)x(t-\tau(t))+$$

$$+\frac{a+b}{4}(x(t)+x(t-\tau(t)))+\sum_{i+j\geq 2}c_{ij}x^i(t)x^j(t-\tau(t)),$$

则存在 $\varepsilon_1>0$, 使当 $0\leq x(t)\leq\varepsilon_1$, $0\leq x(t-\tau(t))\leq\varepsilon_1$ 时有

$$\left(\frac{a+b}{4}\right)(x(t)+x(t-\tau(t)))+$$

$$+\sum_{i+j\geq 2}c_{ij}x^i(t)x^j(t-\tau(t))\geq 0.$$

作比較方程

$$\frac{dX(t)}{dt}=\left(a-\frac{a+b}{4}\right)X(t)+\left(b-\frac{a+b}{4}\right)X(t-\tau(t)),$$

其系数之和为

$$a-\frac{a+b}{4}+b-\frac{a+b}{4}=\frac{a+b}{2}>0.$$

故以 $X(t)\equiv\eta\geq 0$, $-\Delta\leq t\leq 0$ 为初值之解不稳定. 并且有 $\frac{dX}{dt}>0$ 及 $X(t)\to+\infty$. 由此用 $X(t)$ 作比較函数,则在 $|x(t)|<\min(\varepsilon_1,\varepsilon)$ 中有 $\frac{dx(t)}{dt}>\frac{dX(t)}{dt}$.

取同样的初值 $x(t)\equiv X(t)=\eta>0$, $-\Delta\leq t\leq 0$, 则恆有 $x(t)\geq X(t)$. 这不等式一直被保持到 $x(t)$ 超出 $\min(\varepsilon_1,\varepsilon)$ 为止. 而 $\min(\varepsilon_1,\varepsilon)$ 是个正定数, 但 η 可为任何小之正数, 而 $x(t)$ 一定会超过 $\min(\varepsilon_1,\varepsilon)$ 这一定数. 由此即得不稳定. 証毕.

定理 9. 設(1.3)至少有一个具正实部的解,則(1.1)之零解为不稳定;其它假定仍如定理 7, 則存在一正数

$$\Delta=\Delta(a_{ij},b_{ij},F_2^{(i)})>0,$$

使当

$$0\leq\tau_{ij}(t)\leq\Delta,$$

則(3.1)之零解不稳定.

証明重复了定理 4 之两种情形, 只要注意到当 $|x_i(t)|$, $|x_i(t$

$-\tau_{ij}(t))|$足够小时，F 之高次項不影响向量場(例如图 2)之增長方向，即得証明，故略去之。

§4. 二維情形时滞界限的具体計算

在上节中已証明了一般性的定理幷給出了具体求时滞界限的方法。对 $n=1$ 之情形，已在[1]中求出界限。現对 $n=2$ 时用两种方法具体算出充分条件之界限。

以下首先利用特征根方法对穩定情形之时滞界限進行估計：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + b_{11}x_1(t-\tau_{11}) + a_{12}x_2(t) + \\ \qquad\qquad + b_{12}x(t-\tau_{12}), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + b_{21}x_1(t-\tau_{21}) + a_{22}x_2(t) + \\ \qquad\qquad + b_{22}x(t-\tau_{22}), \end{cases}$$

它的特征方程是

$$D(\lambda, \tau_{ij}) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11}e^{-\lambda\tau_{11}} - \lambda & a_{12} + b_{12}e^{-\lambda\tau_{12}} \\ a_{21} + b_{21}e^{-\lambda\tau_{21}} & a_{22} + b_{22}e^{-\lambda\tau_{22}} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} + b_{11}(e^{-\lambda\tau_{11}}-1) - \lambda & a_{12} + b_{12} + b_{12}(e^{-\lambda\tau_{12}}-1) \\ a_{21} + b_{21} + b_{21}(e^{-\lambda\tau_{21}}-1) & a_{22} + b_{22} + b_{22}(e^{-\lambda\tau_{22}}-1) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\equiv [\lambda^2 + a\lambda + b] + H(\lambda, \tau_{ij})$$

$$\equiv D(\lambda) + H(\lambda, \tau_{ij}),$$

此地 $D(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$,

$$\begin{aligned} H(\lambda, \tau_{ij}) = \lambda[& -b_{11}(e^{-\lambda\tau_{11}} - 1) - b_{22}(e^{-\lambda\tau_{22}} - 1)] + \\ & + [(e^{-\lambda\tau_{11}} - 1)b_{11}(a_{22} + b_{22}) + \\ & + (e^{-\lambda\tau_{22}} - 1)b_{22}(a_{11} + b_{11}) + \\ & + (e^{-\lambda\tau_{11}} - 1)(e^{-\lambda\tau_{22}} - 1)b_{11}b_{22} - \\ & - (e^{-\lambda\tau_{21}} - 1)b_{21}(a_{12} + b_{12}) - \\ & - (e^{-\lambda\tau_{12}} - 1)b_{12}(a_{21} + b_{21}) - \\ & - (e^{-\lambda\tau_{21}} - 1)(e^{-\lambda\tau_{12}} - 1)b_{12}b_{21}]. \end{aligned}$$

特别有 $H(\lambda,0)=0$。

取

$$A=\max_{i,j=1,2}[|a_{ij}|,|b_{ij}|],$$

则

$$\begin{aligned}0<a&=-[a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}]\leqslant\\&\leqslant[|a_{11}|+|b_{11}|+|a_{22}|+|b_{22}|]\leqslant 4A,\end{aligned}$$

$$0<b=\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{vmatrix}\leqslant 8A^2.$$

取 $\lambda_0=6A>0$，则当 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant\lambda_0>0$ 时，

$$\tau_{ij}\geqslant 0,\quad |e^{-\lambda\tau_{ij}}|\leqslant 1.$$

$$\begin{aligned}|D(\lambda,\tau_{ij})|\geqslant{}&|\lambda|^2-|\lambda|[(|a_{11}|+|b_{11}|+|a_{22}|+|b_{22}|)]-\\&-[(|a_{11}|+|b_{11}|)(|a_{22}|+|b_{22}|)+(|a_{21}|+\\&+|b_{21}|)(|a_{12}|+|b_{12}|)]\geqslant\\\geqslant{}&|\lambda|^2-|\lambda|4A-8A^2=|\lambda|2A-8A^2\geqslant\\\geqslant{}&(6A)(2A)-8A^2=4A^2>0.\end{aligned}$$

故在 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant\lambda_0$ 中，$D(\lambda,\tau_{ij})=0$ 无根,对 $\tau_{ij}\geqslant 0$。

其次命

$$-L=\mathrm{Re}\left(-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)<0,$$

$$L>0,$$

则当 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant-\dfrac{L}{2}$，$0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\dfrac{2}{L}$ 时，

$$|e^{-\lambda\tau_{ij}}|\leqslant e^{\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{L}\right)}=e.$$

故当

$$|\mathrm{Im}(\lambda)|\geqslant 6Ae,$$

则可取

$$\begin{aligned}|D(\lambda,\tau_{ij})|\geqslant{}&|\lambda|^2-|\lambda|e[|a_{11}|+|b_{11}|+|a_{22}|+\\&+|b_{22}|]-e^2[(|a_{11}|+|b_{11}|)(|a_{22}|+|b_{22}|)-\\&+(|a_{12}|+|b_{12}|)(|a_{21}|+|b_{21}|)]\geqslant\\\geqslant{}&|\lambda|^2-|\lambda|4Ae-8A^2e^2\geqslant\\\geqslant{}&6Ae[6Ae-4Ae]-8A^2e^2=4A^2e^2>0.\end{aligned}$$

所以在 $R(\lambda) > -\frac{L}{2}$，$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \frac{2}{L}$，$|\mathrm{Im}(\lambda)| \geqslant 6Ae$，得到

$$|D(\lambda, \tau_{ij})| > 0.$$

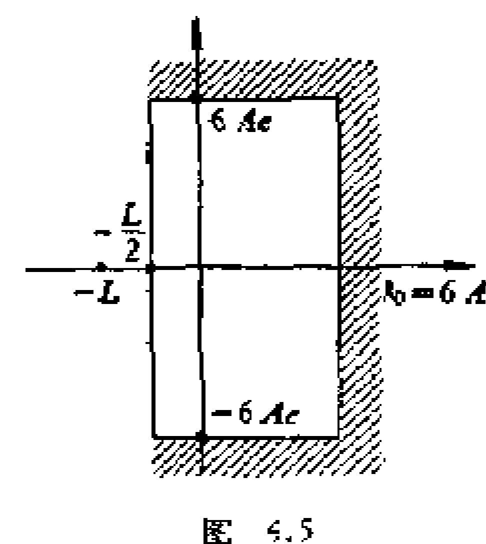


图 4.5

这里沒有根。

下面要計算 $|D(\lambda)|$ 在

$$x = 6A,\ x = -\frac{L}{2};$$

$$y = 6Ae,\quad y = -6Ae$$

四边形达上 R 之极小值

$$\min_R |D(\lambda)|:$$

$$D(\lambda) = \lambda^2 + \lambda a + b,$$

$$\begin{aligned} D(x+iy) &= (x+iy)^2 + a(x+iy) + b = \\ &= x^2 + i2xy - y^2 + ax + iay + b = \\ &= (x^2 + ax + b - y^2) + i(2xy + ay), \end{aligned}$$

故

$$|D(x+iy)|^2 = [(x^2 - y^2 + ax + b)]^2 + [(2x+a)y]^2.$$

在 $x = \lambda_0$ 上有

$$|D(\lambda_0 + iy)|^2 = [\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b - y^2]^2 + [(2\lambda_0 + a)y]^2.$$

此方程可写为

$$\begin{aligned} |D(\lambda_0 + iy)|^2 &= [\alpha - y^2]^2 + \beta^2 y^2 = \\ &= y^4 + y^2[\beta^2 - 2\alpha] + \alpha^2 \geqslant \alpha^2, \end{aligned}$$

此地

$$\alpha = x^2 + ax + b,\quad \beta = (2x + a).$$ 因为

$$\begin{aligned} \beta^2 - 2\alpha &= (2\lambda_0 + a)^2 - 2(\lambda_0^2 + \lambda_0 a + b) = \\ &= 2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 a + a^2 - 2b \geqslant 2(6A)^2 - 2(8A^2) = \\ &= 56A^2 > 0 \end{aligned}$$

(但 $\lambda_0 = 6A$，$0 < a \leqslant 4A$，$0 < b \leqslant 8A^2$)，故在 $x = \lambda_0$ 上，$|D(\lambda_0 + iy)|^2$ 之最小值为

$$\alpha^2 = (\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b)^2.$$

其次对

$$x = -\frac{L}{2},\ -L = \mathrm{Re}\left(-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) < 0,$$

分别討論 $a^2-4b\geqslant 0$ 及 $a^2-4b<0$ 两种情形:

当 $a^2-4b\geqslant 0$, $-L=-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$,

$$\left|D\left(-\frac{L}{2}+iy\right)\right|^2=[\alpha-y^2]^2+\beta^2y^2=$$

$$=y^4+y^2(\beta^2-2\alpha)+\alpha^2,$$

$$\beta^2-2\alpha=2\left[\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{4}\right]^2+$$

$$+\left[\frac{a^2}{2}-2b\right]+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}\quad a>0,$$

因每項均大于零. 故当 $a^2-4b\geqslant 0$, 有

$$\left|D\left(-\frac{L}{2}+iy\right)\right|^2\geqslant\alpha^2=\frac{9}{4}a^2L^2.$$

当 $a^2-4b<0$, $-L=-\frac{a}{2}$, $L=\frac{a}{2}$.

$$\left|D\left(-\frac{L}{2}+iy\right)\right|^2=y^4+y^2(\beta-2\alpha)+\alpha^2=$$

$$=y^4+y^2(\beta^2-2\alpha)+\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2+$$

$$+\left[\alpha^2-\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2\right],$$

$$\alpha^2-\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2=\frac{\beta^2}{4}(4\alpha-\beta)=\frac{a^2}{16}(-a^2+b)>0.$$

由此,当 $a^2-4b<0$, 有

$$\left|D\left(-\frac{L}{2}+iy\right)\right|^2\geqslant\frac{\beta^2}{4}(4\alpha-\beta^2)=-\frac{a^2(a^2-4b)}{16}.$$

对于 $a^2-4b<0$ 进一步計算之. 研究

$$\frac{\beta^2-2\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\left(2\left(-\frac{a}{4}\right)+a\right)^2-2\left(\left(-\frac{a}{4}\right)^2+a\left(-\frac{a}{4}\right)+b\right)}{2}.$$

当 $5a^2-16b\geqslant 0$，則

$$\left|D\left(-\frac{L}{2}+iy\right)\right|^2\geqslant\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2+$$

$$+\left(\alpha^2-\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2\right)=\alpha^2=$$

$$=\left[\left(\frac{-a}{4}\right)^2+a\left(\frac{-a}{4}\right)+b\right]^2=$$

$$=\left(\frac{-3a^2+16b}{16}\right)^2\geqslant\left(\frac{b}{4}\right)^2.$$

即当 $a^2-4b<0$ 且 $5a^2-16b\geqslant 0$ 时，則

$$|D|^2\geqslant\left(\frac{b}{4}\right)^2.$$

而对 $a^2-4b<0$ 且 $5a^2-16b\leqslant 0$ 时，則

$$|D|^2\geqslant\left(\alpha^2-\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{2}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{\beta^2}{4}(4\alpha-\beta^2)=-\frac{\beta^2}{4}(a^2-4b)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\beta^2\left(-\frac{16}{5}b+b\right)}{4}\geqslant\frac{\frac{4}{5}b\beta^2}{4}=\frac{b}{5}\beta^2=\frac{ba^2}{20}.$$

以下計算 $y=\pm 6Ae$，$\frac{-L}{2}\leqslant x\leqslant\lambda_0$ 上之情形：

$$|D(x\pm i6Ae)|^2=[(x^2-36A^2e^2)+$$

$$+ax+b]^2+(2x+a)^2 36A^2e^2.$$

对 x 微商之，有

$$\frac{d}{dx}|D|^2=2(2x+a)[x^2+ax+b+36A^2e^2].$$

当 $x>-\frac{a}{2}$，$2x+a>0$，

$$ax+36A^2e^2>-\frac{a^2}{2}+36A^2e^2>$$

$$>-\frac{(4A)^2}{2}+36A^2e^2=A^2(36e^2-8)>0,$$

故最小值取在 $x=-\frac{a}{2}$，則有

$$|D(x+i6Ae)|^2 \geqslant \left[\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - 36A^2e^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{-a^2}{4} + b - 36A^2e^2\right]^2 \geqslant [36A^2e^2 - b]^2 \geqslant$$

$$\geqslant [36A^2e^2 - 8A^2]^2 = A^4[36e^2 - 8]^2.$$

所以最小值分别如下：

在 $x=\lambda_0$ 上，$|D|^2 \geqslant (\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b)^2$；

在 $y=\pm 6Ae$ 上，$|D|^2 \geqslant A^4(36e^2-8)^2$；

在 $x=-\frac{L}{2}$ 上，$-L=\mathrm{Re}\left(-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)<0$；

當

$$a^2-4b \geqslant 0,\quad |D|^2 \geqslant \frac{9}{4}a^2L^2;$$

$$a^2-4b<0\quad \begin{cases} \text{且 } 5a^2-16b \geqslant 0 \text{ 時}, |D|^2 \geqslant \left(\frac{b}{4}\right)^2, \\ \text{且 } 5a^2-16b<0 \text{ 時}, |D|^2 \geqslant \frac{ba^2}{20}. \end{cases}$$

以下比較上面五个值之大小：

$(\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b)^2 = (36A^2 + a6A + b)^2 \leqslant$

$\leqslant A^4(36+24+8)^2 = A^4(68)^2 < A^4(36e^2-8)^2$，

故 R 上之最小值可以不計 $y=\pm 6Ae$ 上之情形.

由

$$\frac{ba^2}{20} \leqslant \frac{8A^2(AA)^2}{20} = \frac{8\times 16A^4}{20} = \frac{32}{5}A^4 \leqslant$$

$$\leqslant (36A^2)^2 \leqslant (36A^2 + a6A + b)^2,$$

故在 $x=\lambda_0$ 上之最小值可以不計.

現在只要比較

$$\frac{9}{4}a^2L^2,\quad \left(\frac{b}{4}\right)^2,\quad \frac{ba^2}{20},$$

此地

$$L=\frac{a}{2}-\left|\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}\right|.$$

由二项式

$$\sqrt{1-\omega}=1-\frac{\omega}{2}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 2}\omega^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3-\cdots$$

(当 $0<\omega<1$ 成立),

故

$$\sqrt{a^2-4b}=a\sqrt{1-\frac{4b}{a^2}}=a\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{4b}{a^2}\right)-\cdots-\right]$$

或

$$L=\frac{a}{2}-\left|\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}\right|=\frac{a}{2}\left[1-1+\frac{1}{2}\left(\frac{4b}{a^2}\right)+\cdots\right]$$

$$\geqslant\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{4b}{a^2}\right]=\frac{b}{a}.$$

所以

$$\frac{9}{4}a^2L^2\geqslant\frac{9}{4}\frac{a^2b^2}{a^2}=\frac{9}{4}b^2>\left(\frac{b}{4}\right)^2.$$

因此,只要比較

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2\text{ 及 }\left(\frac{ba^2}{20}\right),$$

但两者无法比較大小,因 a 与 b 各自独立.

由此最后得到

$$|D|^2\geqslant\min\left[\left(\frac{b}{4}\right)^2,\ \frac{ba^2}{20}\right].$$

現在在四边形 R 上,

$$|\lambda|\leqslant\sqrt{\lambda_0^2+(6Ae)^2}=\sqrt{(6A)^2+(6Ae)^2}=6A\sqrt{1+e^2},$$

故

$$|H(\lambda,\tau_{ij})|\leqslant 6A\sqrt{1+e^2}2A|e^{-\lambda\tau}-1|+$$
$$+8A^2|e^{-\lambda\tau}-1|$$
$$+2A^2|e^{-\lambda\tau}-1|^2$$

当 $|\lambda\tau|<\eta<1$，则 $|e^{-\lambda\tau}-1|\leqslant 2\eta$. 故当 $|\lambda\tau|<\eta<1$，

$$
\begin{aligned}
|H(\lambda,\tau_{ij})| &\leqslant [12A^2\sqrt{1+e^2}+8A^2+8A^2\cdot 2\eta]\cdot 2\eta\leqslant \\
&\leqslant [12A^2\sqrt{1+e^2}+8A^2+8A^2]\cdot 2\eta\leqslant \\
&\leqslant [36A^2+16A^2]2\eta\leqslant \\
&\leqslant 104\eta A^2.
\end{aligned}
$$

要使

$$[104\eta A^2]^2<\min\left[\left(\frac{b}{4}\right)^2,\ \frac{ba^2}{20}\right],$$

即要

$$\eta^2<\frac{\min\left[\left(\frac{b}{4}\right)^2,\ \frac{ba^2}{20}\right]}{[104A^2]^2}$$

（这里已包含了 $\eta<1$ 之条件，因为 $b\leqslant 8A^2$，$a\leqslant 4A$.
故

$$\left(\frac{\min\left[\left(\frac{b}{4}\right)^2,\ \frac{ba^2}{20}\right]}{[104A^2]^2}\right)\leqslant\frac{\min\left(4,\frac{8\times 4^2}{20}\right)}{(104)^2}=\frac{4}{(104)^2}<1).$$

以下只要

$$|\lambda\tau|^2<\frac{\min\left[\left(\frac{b}{4}\right)^2,\ \frac{ba^2}{20}\right]}{(104A^2)^2},$$

但 $|\lambda|\leqslant 6A\sqrt{1+e^2}\leqslant 18A$. 故只要

$$\tau^2\leqslant\frac{\min\left[\left(\frac{b}{4}\right)^2,\ \frac{ba^2}{20}\right]}{(18A)^2(104A^2)^2},$$

$$\tau\leqslant\sqrt{\frac{\min\left[\left(\frac{b}{4}\right)^2,\ \frac{ba^2}{20}\right]}{18^2\times 104^2A^6}}$$

或

$$0\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{7000}\sqrt{\min\left(\frac{b^2}{A^4},\ \frac{ba^2}{A^4}\right)}\frac{1}{A}$$

即足够.

最后結果:

$$\Delta \text{可取为} \frac{1}{7000}\sqrt{\min\left(\frac{b^2}{A^4}, \frac{ba^2}{A^4}\right)}\cdot\frac{1}{A}.$$

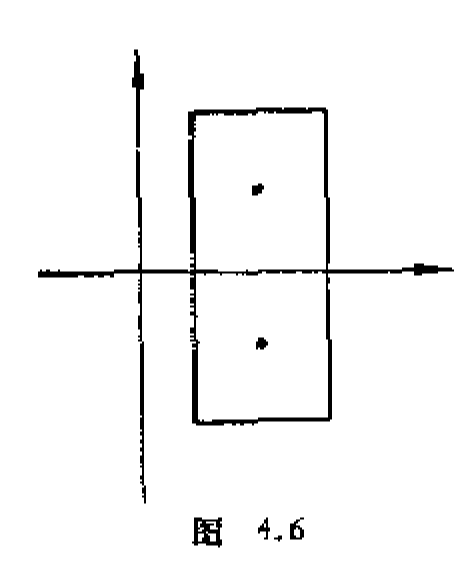
以下轉入对不稳定情形之时滞界限进行估計. 分别 $ab \neq 0$ 及 $ab = 0$ 估計之. 当 $ab \neq 0$ 时又分别二种情形研究:

$$a^2 - 4b \leqslant 0,$$
$$a^2 - 4b > 0.$$

当

$$a^2 - 4b \leqslant 0, -\frac{a}{2} > 0 \quad (a < 0),$$

$D(\lambda) = 0$ 之根在 $\dfrac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2}$.


图 4.6

取四条直綫作长方形:

$$x = -\frac{a}{4}, x = -a; y = \pm\sqrt{4b}.$$

在 $x = -\dfrac{a}{4}$ 上研究之:

$$\left|D\left(-\frac{a}{4} + iy\right)\right|^2 = y^4 + y^2 \times$$
$$\times\left[\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} - b\right] +$$
$$+\left[\frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{4} + b\right]^2,$$

$$0 = \frac{d|D|^2}{dy} = 2y\left[2y^2 + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{16} - b\right)\right],$$

则

$$y = 0 \text{ 及 } y^2 = \frac{1}{2}\left[b - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{16}\right] = \frac{1}{2}\left[b - \frac{7}{16}a^2\right]$$

为解. 分别 $b - \dfrac{7}{16}a^2 \leqslant 0$ 及 $b - \dfrac{7}{16}a^2 \geqslant 0$.

当 $b - \dfrac{7}{16}a^2 \leqslant 0$, 则 $y = 0$ 为极小;

$$\left|D\left(-\frac{a}{4}+0\right)\right|^2=\left[-\frac{3a^2}{16}+b\right]^2.$$

現 $a^2-4b\leqslant 0$, $b-\frac{7}{16}a^2\leqslant 0$,

故

$$\frac{1}{4}a^2\leqslant b\leqslant\frac{7}{16}a^2,$$

則有

$$\frac{1}{16}a^2\leqslant b-\frac{3a^2}{16}\leqslant\frac{a^2}{4},$$

所以

$$|D|^2\geqslant\left(\frac{a^2}{16}\right)^2.$$

当 $b-\frac{7}{16}a^2>0$,

則

$$\left.\frac{d^2|D|^2}{dy^2}\right|_{y=0}=\left[\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{16}-b\right]=\frac{7}{16}a^2-b<0.$$

故 $y=0$ 是极大.

所以极小在 $y=\frac{1}{4}\left(b-\frac{7}{16}a^2\right)$,

$$\left|D\left(-\frac{a}{4}+iy\right)\right|^2\geqslant\left[\frac{a^2}{4}+\frac{3}{4}b\right]^2+\frac{a^2}{16}\left(b-\frac{7}{16}a^2\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left[\frac{a^2}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{16}a^2\right]^2=\left[\frac{37}{64}a^2\right]^2.$$

但$\left(\frac{1}{16}\right)<\frac{37}{64}$. 故在 $x=-\frac{a}{4}$ 上, $|D|^2\geqslant\left(\frac{a^2}{16}\right)^2$. 在 $x=-a$ 上,

$|D(a+iy)|^2=y^4+(a^2-2b)y^2+b^2$,

$$0=\frac{d}{dy}|D|^2=y[3y^2+2(a^2-2b)],$$

故

$$y=0、3y^2+2(a^2-2b)=0.$$

当 $a^2-2b\geqslant 0$, 則 $y=0$ 为极小,

$$|D|^2 \geqslant b^2 \geqslant \left(\frac{a^2}{4}\right)^2.$$

当 $a^2-4b<0$，则 $y^2=-\frac{2}{3}(a^2-2b)$为极小，

$$|D|^2 \geqslant \left[b+\frac{2}{3}(a^2-2b)\right]^2+a^2\left[\frac{2}{3}(2b-a^2)\right] \geqslant \frac{a^4}{4}.$$

因此在 $x=-a$ 上，$|D|^2 \geqslant \left(\frac{a^2}{4}\right)^2$.

以下研究 $y^2=4b$ 之情形：

$$|D(x\pm\sqrt{4b}i)|^2=[x^2+ax+b-4b]^2+(2x+a)^2 4b,$$

$$\frac{d}{dx}|D|^2=2(2x+a)[x^2+ax+5b].$$

但

$$a^2-4(5b)=(a^2-4b)-16b \leqslant -16b<0,$$

故只有 $2x+a=0$ 或 $x=-\frac{a}{2}$ 时， $0=\frac{d}{dx}|D|^2$.

由此，有

$$|D(x\pm\sqrt{4b}i)|^2 \geqslant \left|D\left(-\frac{a}{2}\pm\sqrt{4b}i\right)\right|^2=$$

$$=\left[-\frac{a^2}{4}-3b\right]^2 \geqslant \left(\frac{a^2}{4}\right)^2 \text{(因为 } b<0\text{)}.$$

总結得到当 $a^2-4b \leqslant 0$ 时，在四边形 R 上

$$|D|^2 \geqslant \left(\frac{a^2}{16}\right)^2.$$

由

$$|D(x+iy)|^2=[x^2+ax+b]^2+$$
$$+[(2x+a)^2-2(x^2+ax+b)]y^2+y^4,$$

$$0=\frac{\partial|D|^2}{\partial y}=y\{4y^2+2[(2x+a)^2-2(x^2+ax+b)]\},$$

解 $y=0$ 及 $y^2=\frac{1}{2}[-2x^2-2ax+2b-a^2]$；由

$$-2x^2-2ax+2b-a^2=0,$$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{4b-a^2}}{-2}.$$

在 $a^2-4b>0$ 时，$\sqrt{4b-a^2}$ 为虚的，故实的 x 不存在。因此，最小值只在 $y=0$。故当 $a^2-4b>0$，则 $|D(x+iy)|^2\geqslant[x^2+ax+b]^2$。

分别 $b>0$ 及 $b<0$ 两种情形：当 $b>0$ 时，由不稳定性知 $a<0$。

取四边形 R_1：

$$x=0 \text{ 及 } x=-a>0;$$
$$y=\pm L,\quad L=2|a|+\sqrt{|b|}>0,$$

则在 $x=0$ 及 $x=-a>0$ 边上，$|D|^2$ 分别大于等于 $|D(0)|^2$ 及 $|D(-a)|^2$，

即 $$[b]^2 \text{ 及 } [(-a)^2+a(-a)+b]^2=b^2.$$

取 $$y=\pm L,\quad L=2|a|+\sqrt{|b|},$$

则在 $$y=\pm L,\quad 0\leqslant x\leqslant -a \text{ 上}$$

$$|D(x+iy)|^2\geqslant[x^2+ax+b-y^2]^2\geqslant$$
$$\geqslant[2a^2+b-(2|a|+\sqrt{|b|})^2]^2=$$
$$=4|a|[|a|+\sqrt{|b|}]^2\geqslant$$
$$\geqslant 4.2\sqrt{|b|}[2\sqrt{|b|}+\sqrt{|b|}]^2\geqslant 72(b)^2>b^2.$$

故在 R_1 上有 $|D|^2\geqslant b^2$。

其次对 $b<0$ 之情形：

取四边形 R_2：

$$x=0,\qquad x=\frac{-a+|a|+2\sqrt{|b|}}{2};$$

$$y=\pm L_1,\qquad L_1=\sqrt{2}(|a|+\sqrt{|b|})>0,$$

则在 $x=0$ 上，

$$|D(x+iy)|^2\geqslant|D(0)|^2=b^2;$$

在 $x=\dfrac{-a+|a|+2\sqrt{|b|}}{2}$ 上，

$$|D(x+iy)|\geqslant\left|D\left(\frac{-a+|a|+2\sqrt{|b|}}{2}\right)\right|^2=a^2|b|;$$

在 $y=\pm L_1$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{-a+|a|+2\sqrt{|b|}}{2}$ 上,

$$
\begin{aligned}
|D(x+iy)|^2 &\geqslant [x^2+ax+b-y^2]^2\geqslant\\
&\geqslant[|x|^2+|ax|+|b|-y^2]^2\geqslant\\
&\geqslant\left[\left(\frac{-a+|a|+2\sqrt{|b|}}{2}\right)^2+\right.\\
&\left.+\left(\frac{-a+|a|+2\sqrt{|b|}}{2}\right)|a|+b-L_1^2\right]^2\geqslant\\
&\geqslant[(|a|+\sqrt{|b|})^2+(|a|+\sqrt{|b|})|a|+\\
&+|b|-2(|a|+\sqrt{|b|})^2]^2=a^2|b|.
\end{aligned}
$$

因此当 $b<0$, $a^2-4b>0$. 在 R_2 上, $|D|^2$ 之最小值大于等于 $\min[a^2|b|, b^2]$.

以下总結計算之:

在 R 上, $|\lambda|^2$ 最大为 $(-a)^2+(\sqrt{4b-a^2})^2=4b$;

在 R_1 上, $|\lambda|^2$ 最大为 $(-a)^2+(2|a|+\sqrt{|b|})^2$;

在 R_2 上, $|\lambda|^2$ 最大为 $\left(\dfrac{-a+|a|+2\sqrt{|b|}}{2}\right)^2+$

$$+[\sqrt{2}(|a|+\sqrt{|b|})]^2.$$

这些 $|\lambda|^2$ 均小于或等于 $3(|a|+\sqrt{|b|})^2$.

在 $a^2-4b\leqslant 0$, $|D|^2\geqslant\left(\dfrac{a}{16}\right)^2$;

在 $a^2-4b>0$, $b>0$, $|D|^2\geqslant b^2$;

在 $a^2-4b>0$, $b<0$, $|D|^2\geqslant\min[a^2|b|, b^2]$.

注意到 $\min[a^2, b]\leqslant\sqrt{a^2|b|}$,故对所有情形

$$|D|^2\geqslant\left(\frac{1}{16}\right)^2\min[a^2, b^2].$$

而对所有情形

$$|\lambda|\leqslant\sqrt{3}(|a|+\sqrt{|b|})\leqslant\sqrt{3}\ (4A+\sqrt{8}A)\leqslant 16A,$$

故 $|H(\lambda,\tau_{ij})| \leqslant 16A_1^2 2A|e^{-\lambda\tau}-1| +$
$$+8A^2|e^{-\lambda\tau}-1| + 2A|e^{-\lambda\tau}-1|^2.$$

当 $|\lambda\tau| < \eta < 1$，有$|e^{-\lambda\tau}-1| \leqslant 2\eta$. 故当$|\lambda\tau| < \eta < 1$，$|\lambda| \leqslant 16A$，有

$|H(\lambda,\tau_{ij})| \leqslant [32A^2 + 8A^2 + 2A^2\cdot 2\eta]\cdot 2\eta \leqslant 88A^2\eta.$

要使 $[88A^2\eta]^2 < \left(\frac{1}{16}\right)^2 \min[a^4, b^2]$，只要取

$$\eta^2 < \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^2 \min(a^4, b^2)}{(88)^2\cdot A^4}$$

($\eta < 1$ 之条件已包括在内，因为 $|b| \leqslant 8A^2$, $|a| \leqslant 4A$).

以下只要取

$$|\lambda\tau|^2 < \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^2 \min[a^4, b^2]}{(88)^2 A^4\cdot(16)^2\cdot A^2}.$$

因此对 $ab \neq 0$ 可以取

$$\Delta = \frac{1}{23000}\sqrt{\min\left[\frac{a^4}{A^4}, \frac{b^2}{A^4}\right]}\cdot\frac{1}{A}$$

即得.

当 $ab = 0$ 时，又分

$$b = 0, \quad a \neq 0,$$
$$及 \quad b \neq 0, \quad a = 0$$

两种情形估計之:

当 $b = 0$, $a < 0$ 时, $D(\lambda) = 0$ 之根在 0 及 $-a > 0$.

取四条直綫:

$$x = -\frac{a}{2}, \quad x = -2a;$$

$$y = \pm L_3, \quad L_3 = -a > 0,$$

则在 $x = -\frac{a}{2}$ 上,

$$|D(x+iy)|^2 = |(x+iy)^2 + a(x+iy)|^2 =$$

$$= |x+iy|^2|x+iy+a|^2 =$$
$$= \left|-\frac{a}{2}+iy\right|^2\left|\frac{a}{2}+iy\right|^2 = \left|\frac{a}{2}+y^2\right|^2 \geqslant \left(\frac{a^2}{2}\right)^2;$$

在 $x=-2a$ 上，

$$|D(x+iy)|^2 = |x+iy|^2|x+iy+a|^2 =$$
$$= |-2a+iy|^2|-2a+iy+a|^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4a^4;$$

在 $y=\pm L_3$, $L_3=-a>0$ 上，有

$$|D(x+iy)|^2 \geqslant y^4 = a^4.$$

故总合有$|D(x+iy)|^2 \geqslant 4a^4$，而

$$|\lambda|^2 \leqslant (2a)^2+(a^2) = 5a^2 \leqslant 5(4A)^2 \leqslant (12A)^2,$$
$$H(\lambda,\tau_{ij}) \leqslant [12A\cdot 2A+8A^2+2A\cdot 2\eta]\cdot 2\eta \leqslant 72A^2.$$

所以

$$|\lambda\tau|^2 \leqslant \frac{4a^4}{(72A)^2} \text{ 或 } \tau \leqslant \frac{2a^2}{72A^2\cdot 12A} = \frac{a^2}{432A^3},$$

当 $b=0$，可取 $\Delta = \frac{a^2}{432A^3}$.

若 $a=0$，则 $b<0$ 方得不稳定．故

$$|D(x+iy)|^2 \geqslant (x^2+b)^2,$$

则在 $x=0$ 上，$|D(x+iy)|^2 \geqslant |D(0)|^2 = b^2$；而在

$$x=\sqrt{2|b|} \text{ 上，} |D(x+iy)|^2 \geqslant b^2;$$

在 $y=\pm L_2$, $L_2=\sqrt{2}\sqrt{|b|}>0, 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2|b|}$ 上有

$$|D(x+iy)|^2 \geqslant (x^2+b^2-y^2)^2 \geqslant$$
$$\geqslant (2|b|+b-2|b|)^2 \geqslant b^2.$$

因此，当 $a=0$，则在四边形 $x=0$, $x=\sqrt{2|b|}$, $y=\pm\sqrt{2|b|}$ 上有

$$|D(x+iy)|^2 \geqslant b^2.$$

又

$$\lambda^2 = x^2+y^2 \leqslant 4|b| \leqslant 32A^2 < (6A)^2,$$

故

$$|H(\lambda,\tau_{ij})| \leqslant 6A\cdot 2A|e^{-\lambda\tau}-1| + 8A^2|e^{-\lambda\tau}-1| +$$
$$+ 2A^2|e^{-\lambda\tau}-1|^2$$

$$\leqslant [12 + 8 + 4\eta] A^2 \cdot 2\eta \leqslant$$
$$\leqslant 48 A^2 \eta.$$

所以

$$|\lambda\tau|^2 \leqslant \frac{b^2}{(48A^2)^2}$$

或

$$\tau \leqslant \frac{b}{288A^3}.$$

即当 $a = 0$，可取 $\Delta = \dfrac{b}{288A^3}$.

用李雅普諾夫函数方法对稳定情形之时滞界限进行估計:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = a_1 x(t) + a_2 x(t-\tau_1) + b_1 y(t) + b_2 y(t-\tau_2), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = c_1 x(t) + c_2 x(t-\tau_3) + d_1 y(t) + d_2 y(t-\tau_4). \end{cases}$$

将上方程組改写成下列形式:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = (a_1 + a_2)x(t) + a_2[x(t-\tau_1) - x(t)] + \\ \qquad + (b_1 + b_2)y(t) + b_2[y(t-\tau_2) - y(t)], \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = (c_1 + c_2)x(t) + c_2[x(t-\tau_3) - x(t)] + \\ \qquad + (d_1 + d_2)y(t) + d_2[y(t-\tau_4) - y(t)]. \end{cases}$$

作 $v(x(t), y(t)) = b(x^2(t) + y^2(t)) +$
$+ [(c_1 + c_2)x(t) - (a_1 + a_2)y(t)]^2 +$
$+ [(d_1 + d_2)x(t) - (b_1 + b_2)y(t)]^2.$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x(t)} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y(t)} \frac{dy(t)}{dt} =$$
$$= -ab(x^2(t) + y^2(t)) + \{2bx(t) + 2[(c_1 +$$
$$+ c_2)x(t) - (a_1 + a_2)y(t)][c_1 + c_2] +$$
$$+ 2[(d_1 - d_2)x(t) - (b_1 + b_2)y(t)](d_1 +$$
$$+ d_2)\}\{a_2[x(t-\tau_1) - x(t)] +$$
$$+ b_2[y(t-\tau_2) - y(t)]\} + \{2by(t) -$$
$$- 2[(c_1 + c_2)x(t) - (a_1 + a_2)y(t)](a_1 +$$

$$+ a_2) - 2[(d_1 + d_2)x(t) - (b_1 + b_2)y(t)](b_1 + b_2)\}\{c_2[x(t-\tau_3) - x(t)] + d_2[y(t-\tau_4) - y(t)]\}.$$

記 $A = \max\limits_{i=1,2}\{|a_i|, |b_i|, |c_i|, |d_i|\}$,

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -2ab(x^2(t)+y^2(t)) + 2[(8A^2+8A^2)x(t) + (4A^2 + 4A^2)|y(t)|]\cdot A[|x(t-\tau_1) - x(t)| + |y(t-\tau_2) - y(t)|] + 2[(8A^2 + 8A^2)|y(t)| + (4A^2 + 4A^2)|x(t)|]\cdot A[|x(t-\tau_3) - x(t)| + |y(t-\tau_4) - y(t)|].$$

現在来仔細估值:

$$|x(t-\tau_i) - x(t)| = \left|\int_{t-\tau_i}^{t} \frac{dx(t)}{dt}dt\right| \leqslant \leqslant |\tau_i||x'(t')| \leqslant |\tau_i|A[|x(t')| + |y(t')| + |x(t'-\tau_i)| + |y(t'-\tau_i)|],$$

同理

$$|y(t-\tau_j) - y(t)| \leqslant |\tau_j|A[|x(t'')| + |x(t''-\tau_j)| + |y(t'')| + |y(t''-\tau_j)|].$$

取

$$\tau = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4),$$

則

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -2ab(x^2(t) + y^2(t)) + 32A^4\cdot\tau[8+4\times4\times24A^2](|x(t)|^2+|y(t)|^2).$$

由于

$$[(c_1 + c_2)x(t) - (a_1+a_2)y(t)]^2 \leqslant 8A^2[x^2(t) + y^2(t)],$$

所以

$$v(x(t), y(t)) \leqslant 24A^2(x^2(t) + y^2(t)).$$

但另一方面,

$$24A^2(x^2(t) + y^2(t)) \geqslant v(x(t), y(t)) \geqslant b(x^2(t) + y^2(t)). \quad (*)$$

如果 $x(t'-\tau_i), y(t'-\tau_i)$ 在 $4v(x(t), y(t))$ 中,則由(＊)有

$$x^2(t'-\tau_i) + y^2(t'-\tau_i) \leqslant \frac{4\cdot24A^2(x^2(t) + y^2(t))}{b}.$$

因此 $v(x(t), y(t))$ 正定. 要使 $\frac{dv}{dt}$ 負定,必須取

$$\tau \leqslant \frac{ab}{4 \times 16A^4\left[8 + 16\frac{24A^2}{b}\right]} = \frac{ab}{256A^4\left[1 + \frac{48A^2}{b}\right]}^{1)}.$$

§ 5. n 維情形时滯界限的一般公式 [11]

在 §4 中,曾就 $n = 2$ 时的常系数綫性微分差分方程

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t - \tau_{ij}) \tag{5.1}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

作了时滯 $\tau_{ij} \equiv \tau_{ij}(t) \geqslant 0$ 的界限估計. 現在对一般 n 的穩定情形的时滯界限,給予估計.

我們設 $a_{ij} = c_{ij} + b_{ij}$, 那末(5.1)可以写成

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}[x_j(t-\tau_{ij})-x_j(t)], \tag{5.2}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

取方程組

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5.3}$$

的李雅普諾夫函数第二章 §3(3.7), 沿(5.2)的积分曲綫求微商,有

$$\frac{dV}{dt} = -2\Delta_1\cdots\Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2(t) + 2\Delta_1\cdots$$

$$\Delta_n \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_{ij}x_i(t)[x_j(t - \tau_{ij}) - x_j(t)] +$$

$$+ 2\sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq\sigma\pm1}}^{n} \Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1(t), \cdots, x_n(t))\Delta_{\sigma,j} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{n} b_{1k}(x_k(t - \tau_{1k})-x_k(t)), \cdots, \sum_{k=1}^{n} b_{nk}(x_k(t -\right.$$

1) 这个估計对于变时差也是可用的。

$$-\tau_{nk}) - x_k(t))\Big).$$

我們要对 $\Delta_{\sigma,j}(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 进行估計. 于是有下述引理.

引理 4. 命 $A = \max(c_{ij}, b_{ij})$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 則有

$$|\Delta_{\sigma,j}(x_1(t), \cdots, x_n(t))| <$$

$$< (\sigma-1)!(n!)^{\sigma-1}(2A)^{\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}} K_\sigma \sum_{q=1}^{n} x_q(t)|, \qquad (5.4)$$

$$\sigma = 1, 2, \cdots, n-1,\ j = 1, 2, \cdots, n;$$

$$K_\sigma = \begin{cases} C_1^{n-1} + C_3^{n-1}\cdot 3! + \cdots + C_\sigma^{n-1}\cdot\sigma! = \\ \quad = (n-1) + (n-1)(n-2)(n- \\ \qquad -3) + \cdots + (n- \\ \qquad -1)\cdots(n-\sigma), \qquad \sigma\text{奇数} \\ 1 + C_2^{n-1}\cdot 2! + \cdots + C_\sigma^{n-1}\cdot\sigma! = \\ \quad = 1 + (n-1)(n-2) + \cdots + \\ \qquad + (n-1)\cdots(n-\sigma), \qquad \sigma\text{偶数} \end{cases} \qquad (5.4)'$$

証. 由 $A = \max(c_{ij}, b_{ij})$, 知 $|a_{ij}| \leqslant 2A$. 今先估計 p_σ, p_σ 是 $|a_{ij}|$ 的諸 σ 阶主子行列式的和(相差一个因子$(-1)^\sigma$), 这个子行列式共有 C_σ^n 个, 每个有 $\sigma!$ 項, 每項为 σ 个因子乘积, 故有

$$|p_\sigma| \leqslant C_\sigma^n(2A)^\sigma(\sigma!) =$$

$$= n(n-1)\cdots(n-\sigma+1)(2A)^\sigma \leqslant n!(2A)^n, \qquad (5.5)$$

$$\sigma = 1, 2, \cdots, n.$$

再估計 $\Sigma M^{(j)}_{\nu_1,\cdots,\nu_\sigma}(x_1(t), \cdots, x_n(t))$. 它是 $C_{\sigma-1}^{n-1}$ 个 σ 阶行列式的和, 每个行列式中 $x_i(t)$ 对应的子式为$(\sigma-1)$阶, 此$(\sigma-1)$阶子式的絕对值不超过$(\sigma-1)!(2A)^\sigma$, 故

$$|\Sigma M^{(j)}_{\nu_1,\cdots,\nu_\sigma}(x_1(t), \cdots, x_n(t))| \leqslant$$

$$\leqslant C_{\sigma-1}^{n-1}(2A)^\sigma[(\sigma-1)!]\sum_{q=1}^{n}|x_q(t)|, \qquad (5.6)$$

$$\sigma = 1, 2, \cdots, n.$$

最后估計

$$\Delta_{\sigma,t}(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-3} p_{2\sigma-1} \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-4} p_{2\sigma-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_{\sigma-1} p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots \Sigma_{\sigma-1} \Sigma_{\sigma+1} \end{vmatrix},$$

它是 a_{it} 的 $1 + 2 + \cdots + \sigma - 1 + \sigma = \frac{\sigma(\sigma+1)}{2}$ 次齐次式，所以在估計时，可以暂时不管因次。我們将上式按最后一行展开成子式，分别估計。但事实上可以用同一上界来估計这些子式（注意，我們已不管它們的因次了），例如可以考慮 $\Sigma_{\sigma+1}$ 对应的子式

$$\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-3} \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-4} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_{\sigma-1} \end{vmatrix},$$

它是 $\sigma - 1$ 阶行列式，共有 $(\sigma - 1)!$ 項，每項为 $(\sigma - 1)$ 个因子相乘，利用对 p_i 的不等式(5.5)，知道上述行列式之值不大于 $(n!)^{\sigma-1}[(\sigma-1)!]$。再由不等式(5.4)，有

$$|\Delta_{\sigma,t}(x_1(t), \cdots, x_n(t))| \leqslant$$
$$\leqslant (n!)^{\sigma-1}[(\sigma-1)!](2A)^{\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}} K_\sigma \sum_{q=1}^{n} |x_q(t)|,$$

其中 K_σ 如(5.4)′所示。引理 2 証毕。

另外，我們命 $\tau = \max(\tau_{ik})(i, k = 1, 2, \cdots, n)$，有

$$\left.\begin{aligned} &|x_k(t - \tau_{ik}) - x_k(t)| = \\ &= \left|\int_{t-\tau_{ik}}^{t} \frac{d}{dt} x_k(t)\, dt\right| \leqslant |\tau_{ik}|\,|x_k'(t_k')| \leqslant \\ &\leqslant \tau A \sum_{m=1}^{n} [|x_m(t_k')| + |x_m(t_k' - \tau_{km})|], \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

因此，根据引理 2 及不等式(5.7)，有

引理 5.

$$\left|\Delta_{\sigma,t}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{1k}(x_k(t - \tau_{1k}) - x_k(t)), \cdots,\right.\right.$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{nk}(x_k(t-\tau_{nk}) - x_k(t))\Big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant (\sigma-1)!(n!)^{\sigma-1}(2A)^{\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}} K_\sigma \tau A^2 n \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[|x_m(t'_k)| + |x_m(t'_k - \tau_{km})|].$$

現在我們叙述並証明下述定理.

定理. 給定实常系数綫性微分差分方程(5.2), 如果略去时滯的微分方程(5.3)的平凡解是漸近穩定的,並且假設

$$\tau < \frac{1}{2}\frac{\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n}{A^2n^2L\left[1+\frac{4L}{\Delta_2\cdots\Delta_n}\right]}, \tag{5.8}$$

其中

$$\tau = \max(\tau_{ij}),\ i,\ j = 1,\ 2,\cdots,\ n,$$

$$L = \Delta_2\cdots\Delta_n + n^2\sum_{\sigma=1}^{n-1}\Big(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Big)[(\sigma-1)!]^2 \times$$

$$\times (n!)^{2(\sigma-1)}(2A)^{\sigma(\sigma+1)}K_\sigma^2, \tag{5.9}$$

K_σ 如(5.4)′所示, 那末微分差分方程(5.2)的平凡解也是漸近穩定的.

証. 应用引理 2 , 引理 3 , 不等式(5.7)及不等式 $2|\alpha\beta| \leqslant \leqslant \alpha^2+\beta^2$, 有

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t) + \tau\Delta_2\cdots\Delta_nA^2 \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[2x_i^2(t) + x_m^2(t'_j) + x_m^2(t'_j - \tau_{jm})] +$$

$$+ \tau n^2A^2\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\Big(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Big)\times$$

$$\times [(\sigma-1)!]^2(n!)^{2(\sigma-1)}(2A)^{\sigma(\sigma+1)}K_\sigma^2[2x_q^2(t) +$$

$$+ x_m^2(t'_k) + x_m^2(t'_k - \tau_{km})].$$

但是对 $V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 利用引理 2，我們有下面的估值:

$$\Delta_2\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t)\leqslant V(x_1(t),\cdots,x_n(t))\leqslant L\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t),\tag{5.10}$$

其中 L 如(5.9)所示，因此如果 $(x_1(t_k'-\tau_{k1}),\cdots,x_n(t_k'-\tau_{kn}))$ 在 $4V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 中，即

$$V(x_1(t_k'-\tau_{k1}),\cdots,x_n(t_k'-\tau_{kn}))\leqslant$$
$$\leqslant 4V(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\ k=1,2,\cdots,n,$$

则由(5.10)，有

$$\sum_{m=1}^{n}x_m^2(t_k'-\tau_{km})\leqslant\frac{V(x_1(t_k'-\tau_{k1}),\cdots,x_n(t_k'-\tau_{kn}))}{\Delta_2\cdots\Delta_n}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4V(x_1(t),\cdots,x_n(t))}{\Delta_2\cdots\Delta_n}\leqslant\frac{4L}{\Delta_2\cdots\Delta_n}\sum_{m=1}^{n}x_m^2(t).$$

同样有

$$\sum_{m=1}^{n}x_m^2(t_k')\leqslant\frac{4L}{\Delta_2\cdots\Delta_n}\sum_{m=1}^{n}x_m^2(t),$$
$$k=1,2,\cdots,n.$$

因而

$$\frac{dV}{dt}\leqslant-2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t)+2\tau A^2n^2\Delta_2\cdots\Delta_n\times$$
$$\times\sum_{m=1}^{n}\left(1+\frac{4L}{\Delta_2\cdots\Delta_n}\right)x_m^2(t)+2\tau A^2n^4\sum_{\sigma=1}^{n-1}\left(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\right)\times$$
$$\times[(\sigma-1)!]^2(n!)^{2(\sigma-1)}(2A)^{\sigma(\sigma+1)}K_\sigma^2\times$$
$$\times\sum_{m=1}^{n}\left(1+\frac{4L}{\Delta_2\cdots\Delta_n}\right)x_m^2(t)=$$
$$=-2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t)+2\tau A^2n^2L\times$$
$$\times\left(1+\frac{4L}{\Delta_2\cdots\Delta_n}\right)\sum_{m=1}^{n}x_m^2(t).$$

因为 V 是正定的，当 τ 满足不等式(5.8)时，保証了 $\frac{dV}{dt}$ 的負定，因而方程組 (5.2) 确定的平凡解是漸近穩定的. 即在漸近穩定的意义上講，当 τ 滿足不等式(5.8)时，可用微分方程(5.3)来代替微分差分方程(5.2). 定理証毕.

对于具体的 n，估值(5.8)中的 L，即(5.9)可以精确得多. 例如，經过具体計算，对 $n=3$ 可取

$$L = [p_3(p_1p_2 - p_3) + 96p_1p_3A^2 + \\ + 3(p_3 + 24A^2p_1)(p_3 + 8A^2p_1)](p_1p_2 - p_3).$$

第五章　小时滞系統的运动稳定性(临界情形)

§1. 第一临界情形，綫性系統

在这一节中考虑常系数的綫性系統

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t) \tag{1.1}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

与具有时滞的系統

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j(t)+b_{ij}x_j(t-\tau_{ij})) \tag{1.2}$$

在第一临界情形时稳定問題上的等价性，其中系数 a_{ij}, b_{ij}($i,j=1,2,\cdots,n$)均为实常数．方程(1.1)及方程(1.2)的特征方程分别为

$$D(\lambda,1)=|a_{ij}+b_{ij}-\delta_{ij}\lambda|=0 \tag{1.3}$$

及

$$D(\lambda,e^{-\lambda\tau_{ij}})=|a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau_{ij}}-\delta_{ij}\lambda|=0. \tag{1.4}$$

引理 1. 若方程(1.3)有一个为零的单根，其余一切根都具有負实部，則存在 $\Delta>0$，使当

$$0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\Delta\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

时方程(1.4)亦仅有一个为零的单根，其余一切根都具有負实部．

証．方程(1.4)可以写成

$$D(\lambda,e^{-\lambda\tau_{ij}})=|a_{ij}+b_{ij}e^{-\tau_{ij}\lambda}-\delta_{ij}\lambda|=$$
$$=\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\cdots+A_{n-1}\lambda+A_n=0,$$

其中系数 A_i 为 a_{ij}, b_{ij} 及 $e^{-\lambda\tau_{ij}}$($i,j=1,2,\cdots,n$)之多項式．

由于 $\tau_{ij}\geqslant0$　($i,j=1,2,\cdots,n$)在 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant0$ 下

$$|e^{-\lambda\tau_{ij}}|\leqslant1,$$

令 $$A = \max[|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_n|, 1],$$

$$|D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})| \geqslant |\lambda|^n - |A_1||\lambda|^{n-1} - \cdots - $$
$$- |A_{n-1}||\lambda| - |A_n| \geqslant |\lambda|^n - $$
$$- |A|[|\lambda|^{n-1} + |\lambda|^{n-2} + \cdots + |\lambda| + 1].$$

由

$$|\lambda|^{n-1} + |\lambda|^{n-2} + \cdots + |\lambda| + 1 =$$
$$= \frac{|\lambda|[|\lambda|^{n-1} - 1]}{|\lambda| - 1} < \frac{|\lambda|^n}{|\lambda| - 1},$$

$$|D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})| > \frac{|\lambda|^n}{|\lambda| - 1}[|\lambda| - 1 - A] \geqslant 0,$$

所以只要 $|\lambda| \geqslant 1 + A$ 时，$D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 无根.
同理，可証当 $0 \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 1 + A$, $1 + A \leqslant |\mathrm{Im}(\lambda)|$ 时，

$$|D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})| > 0$$

亦成立，即 $D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 无根.

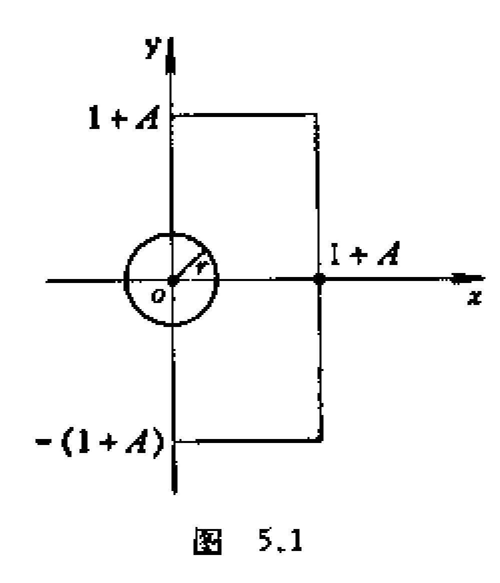


图 5.1

以下轉入考慮矩形

$$0 \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 1 + A,$$
$$|\mathrm{Im}(\lambda)| \leqslant 1 + A$$

內之情形. 設 $D(\lambda 1) = 0$，除零根外，其余所有負实根中实部絕对值最小之根为 λ_0，記

$$|\mathrm{Re}(\lambda_0)| = R > 0$$

围繞原点做一个半径为 $r\left(r \leqslant \frac{R}{2}\right)$ 的半圓.

令 P 表示图 5.1 中矩形挖去了一个半径为 r 的半圓后所围成的閉区域.

在閉域 P 上 $D(\lambda, 1) = 0$ 沒有根，故存在下界 m 使

$$\min_{\lambda \text{在} P \text{之邊界上}} |D(\lambda, 0)| = m$$

成立. 由

$$D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = |a_{ij} + b_{ij}e^{-\tau_{ij}\lambda} - \delta_{ij}\lambda| =$$
$$= D(\lambda, 1) + g(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}),$$

并且有 $g(\lambda, 1) \equiv 0$ 对任何 λ 成立。由 $g(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})$ 对 $\tau_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 的連續性，一定存在 $\Delta_1 > 0$，使当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta_1 \text{ 时 } (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\max_{\lambda \text{在} P \text{边界上}} |g(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})| < m.$$

故由儒歇定理知，当 $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta_1$ 时 $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$

$$D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = D(\lambda, 1) + g(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$$

与

$$D(\lambda, 1) = 0$$

在区域 P 上根的个数相同。而 $D(\lambda, 1) = 0$ 在 P 上无根，故 $D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 在区域 P 上亦无根。

現在考慮剩下的半径为 r 的右半圓內的情形。設半径为 r 的圓的边界为 Γ，则在 Γ 上有

$$\min_{\lambda \in \Gamma} |D(\lambda, 1)| = M > 0.$$

由于 $g(\lambda, 1) \equiv 0$，一定存在 $\Delta_2 > 0$，使当 $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta_2$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 时，

$$\max_{\lambda \in \Gamma} |g(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})| < M$$

成立。由儒歇定理知 $D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 与 $D(\lambda, 1) = 0$ 在半径为 r 之圓內根的个数相同。由于 $D(\lambda, 1) = 0$ 在圓內只有一个单根 $(\lambda_0 = 0)$，故 $D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 在圓內也只有一个单根。由于对任何 $\tau_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，$\lambda = 0$ 为 $D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 之根，即知 $\lambda = 0$ 即为 $D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 之单根。

因此，由上面知道当 $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta$，$\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$，$D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 只有一个为零的单根，而其余一切根都具有負实部。

定理 1. 若引理 1 的条件滿足，即方程(1.1)之零解是穩定的，則存在 $\Delta > 0$，使当 $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 时方程組(1.2)之零解是穩定的。

証. 由引理 1 知，当 $0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta$ 时，(1.2)之特征方程除一为零的单根外，其余一切根都具有負实部。再应用伏里德定理知，当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

方程組(1.2)之零解是穩定的。

引理 2. 若方程(1.3)有 k 个零根,而其余 $n-k$ 个根都具有負实部,則存在 $\Delta>0$,使当 $0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\Delta(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时,方程(1.4)亦有 k 个零根,而其余一切根都具有負实部.

証明完全类似于引理 1.

定理 2. 若引理 2 的条件满足,即方程(1.1)之零解是不稳定的,則存在 $\Delta>0$,使当 $0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\Delta$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时方程組(1.2)之零解也是不稳定的.

应用引理 2 及伏里德定理立即得到証明.

§2. 第一临界情形,非綫性系統,一般情形

1) **問題与方法.** 在第一章总論中提出了等价性問題,在上一章中对于一般 n 的情形作了系統的研究. 这一节就是处理在第一临界情形下的微分方程与微分差分方程的等价性問題.

問題是研究微分方程組

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=X(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))+Y(x_1(t),\cdots,\\
&\qquad x_n(t),x(t)),\\
\frac{dx_s}{dt}&=\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t)+(p_s+q_s)x(t)+\\
&\qquad+X_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))+Y_s(x_1(t),\\
&\qquad\cdots,x_n(t),x(t))\quad(s=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}
$$

与微分差分方程組

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=X(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))+\\
&\qquad+Y(x_1(t-\tau(t)),\cdots,x_n(t-\tau(t)),x(t-\\
&\qquad-\tau(t))),\\
\frac{dx_s}{dt}&=\sum_{\sigma=1}^{n}p_{s\sigma}x_\sigma(t)+\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}x_\sigma(t-\tau(t))+\\
&\qquad p_sx(t)+q_sx(t-\tau(t))+\\
&\qquad+X_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))+Y_s(x_1(t-\\
&\qquad-\tau(t)),\cdots,x_n(t-\tau(t)),x(t-\tau(t)))\\
&\qquad\qquad(s=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}\right\}\tag{1.2}
$$

之間在穩定性中的等价性，这里 $p_{s\sigma}$, $q_{s\sigma}$, p_s, q_s 均为已給常数，$\tau(t)$ 或为非負的实常数，或为非負的实連續函数. 为了解决上述的問題，首先我們考慮 $p_s = 0$, $q_s = 0$ $(s = 1, 2, \cdots, n)$ 的情形，卽研究微分方程組：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= X(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + \\
&\quad Y(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)), \\
\frac{dx_s}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} + q_{s\sigma}) x_\sigma(t) + X_s(x_1(t), \cdots, \\
&\quad x_n(t), x(t)) + Y_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)), \\
&\qquad (s = 1, 2, \cdots, n)
\end{aligned}\right\} \quad (1.3)'
$$

与微分差分方程組

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= X(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + Y(x_1(t - \\
&\quad - \tau(t)), \cdots, x_n(t - \tau(t)), x(t - \tau(t))), \\
\frac{dx_s}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma(t) + \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} x_\sigma(t - \tau(t)) + \\
&\quad + X_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + \\
&\quad + Y_s(x_1(t - \tau(t)), \cdots, x_n(t - \tau(t)), \\
&\quad x(t - \tau(t))) \quad (s = 1, 2, \cdots, n)
\end{aligned}\right\} \quad (1.2)'
$$

的等价性.

滿足条件：(1) $|p_{s\sigma} + q_{s\sigma} - \delta_{s\sigma}\rho| = 0$ $(s, \sigma = 1, 2, \cdots, n)$ 的所有根 ρ_i 有

$$\mathrm{Re}(\rho_i) < 0 (i = 1, 2, \cdots, n);$$

(2) $X(x_1, \cdots, x_n, x)$, $Y(x_1, \cdots, x_n, x)$, $X_s(x_1, \cdots, x_n, x)$, $Y_s(x_1, \cdots, x_n, x)$

是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x$ 确定在坐标原点鄰域內的解析函数，且展式的首項次数不低于 2；

(3) $X^{(0)}(0, \cdots, 0, x) = gx^m + g_{m+1}x^{m+1} + \cdots$

$g \neq 0$, $m \geqslant 2$,

$Y^{(0)}(0, \cdots, 0, x) = lx^m + l_{m+1}x^{m+1} + \cdots$

$l \neq 0, m \geqslant 2,$

$X_s^{(0)}(0, \cdots, 0, x) = g_s x^{m_s} + g_s^{(m_s+1)} x^{m_s+1} + \cdots$

$g_s \neq 0,$

$Y_s^{(0)}(0, \cdots, 0, x) = l_s x^{m_s} + l_s^{(m_s+1)} x^{m_s+1} + \cdots$

$l_s \neq 0;$

(4) $m_s \geqslant m.$

本节所用的方法就是在本书的第一章 §3 中所指出的第二种方法。

2）稳定性的等价性定理

定理 1. 設 m 是奇数，$g + l < 0$，则存在一正数 $\Delta = \Delta(X, Y, p_{s\sigma}, q_{s\sigma}, X_s, Y_s) > 0$，使当 τ 滿足不等式 $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$，则(1.2)′零解为漸近稳定.

証. 当 $\tau = 0$ 时，m 是奇数，$g + l < 0$，則(1.1)′之零解为漸近稳定. 因此存在負定李雅普諾夫函数

$$V(x_1, \cdots, x_n, x) = \frac{1}{2}(g + l)x^2 + W(x_1, \cdots, x_n) + $$
$$+ x^2 Q_2(x_1, \cdots, x_n) + \cdots + x^m Q_m(x_1, \cdots, x_n),$$

这里 $W(x_1, \cdots, x_n)$ 是負定的二次型且滿足方程

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}[(p_{s1} + q_{s1})x_1 + \cdots + (p_{sn} + q_{sn})x_n] = \sum_{s=1}^{n} x_s^2,$$

$$Q_i(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \ (i = 2, \cdots, m),\ A_{ij} \text{ 都是实常量},$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt} =$$

$$= [(l + g)x + 2xQ_2 + \cdots + mx^{m-1}Q_m]\frac{dx}{dt} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s} + x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s} + \cdots + x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right]\frac{dx_s}{dt} =$$

$$= [(l + g)x + 2xQ_2 + \cdots + mx^{m-1}Q_m] \times$$

$$\times [X(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + Y(x_1(t-\tau), \cdots, x_n(t -$$

$$- \tau), x(t - \tau))] + \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial W}{\partial x_s} + x^2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_s} + \cdots \right.$$

$$\left. + x^m \frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right] \left[\sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} x_\sigma(t) + q_{s\sigma} x_\sigma(t - \tau)) + \right.$$

$$+ X_s(x_1, \cdots, x_n, x) + Y_s(x_1(t - \tau), \cdots, x_n(t - \tau),$$

$$\left. x(t - \tau))\right] = [(l + g)x + 2xQ_2 + \cdots + mx^{m-1}Q_m] \times$$

$$\times [X(x_1, \cdots, x_n, x) + Y(x_1, \cdots, x_n, x)] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial W}{\partial x_s} + x^2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_s} + \cdots + x^m \frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right] \times$$

$$\times \left[\sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} + q_{s\sigma}) x_\sigma(t) + X_s(x_1, \cdots, x_n, x) + \right.$$

$$\left. + Y_s(x_1, \cdots, x_n, x)\right] - [(l + g)x + 2xQ_2 + \cdots +$$

$$+ mx^{m-1}Q_m][Y(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) -$$

$$- Y(x_1(t - \tau), \cdots, x_n(t - \tau), x(t - \tau))] -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_s} + x^2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_s} + \cdots + x^m \frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right) \times$$

$$\times \left[\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(x_\sigma(t) - x_\sigma(t - \tau)) + \right.$$

$$+ (Y_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t))) - Y_s(x_1(t - \tau), \cdots,$$

$$\left. x_n(t - \tau), x(t - \tau))\right] =$$

$$= [(l + g)^2 + F(x, x_1, \cdots, x_n)]x^{m+1} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}(x, x_1, \cdots, x_n) x_\alpha x_\beta -$$

$$- [(l + g)x + 2xQ_2 + \cdots + mx^{m-1}Q_m] \times$$

$$\times \left[\int_{t-\delta}^{t} \frac{d}{dt} Y(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) dt\right] -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_s} + x^2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_s} + \cdots + x^m \frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right) \left(\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} \times\right.$$

$$\times \int_{t-\tau}^{t} \frac{dx_\sigma(t)}{dt} dt + \int_{t-\tau}^{t} \frac{d}{dt} Y_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) dt).$$

下面卽估計 τ 之值，使得它能保証 $\dfrac{dV}{dt} > 0$.

根据在第一临界情形下作李雅普諾夫函数的过程中知道，函数 $F(x, x_1, \cdots, x_n)$ 与 $F_{\alpha\beta}(x, x_1, \cdots, x_n)$ 是确定在一个充分小的坐标原点邻域

$$|x| < \beta, \ |x_i| < \beta_i (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.1}$$

內的解析函数，这里 $\beta > 0$, $\beta_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 充分小. 又由条件(2)知，在(2.1)的任何一个閉域

$$|x| \leqslant \gamma < \beta, \ |x_i| \leqslant \gamma_i < \beta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.2}$$

上，$Y(x_1, \cdots, x_n, x)$, $Y_s(x_1, \cdots, x_n, x)$ 及其对于各个自变量的偏导数都是有界的. 同理有

$$\frac{dY}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial x_s} \frac{dx_s}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dY_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial Y_s}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\sigma}{dt} + \frac{\partial Y_s}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

由条件(3)知

$\dfrac{\partial Y}{\partial x_s} = (x_1, \cdots, x_n, x)_1$ (記号 $(x_1, \cdots, x_n, x)_1$ 表示其展式的首項次数不低于 1 次)；

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = (x_1, \cdots, x_n)_1 + mlx^{m-1} + (m+1) l_{m+1} x^m + \cdots;$$

$$\frac{\partial Y_s}{\partial x_\sigma} = (x_1, \cdots, x_n, x)_1;$$

$$\frac{\partial Y_s}{\partial x} = (x_1, \cdots, x_n)_1 + m_s l_s x^{m_s - 1} + (m_s + 1) l_s^{(m_s+1)} x^{m_s} + \cdots.$$

記 $a = \max\limits_{1 \leqslant s, \sigma \leqslant n} \{|p_{s\sigma}|, |q_{s\sigma}|\}$.

任給一 $H(x_1, \cdots, x_n, x) = (l + g)^2 x^{m+1} + \sum\limits_{s=1}^{n} x_s^2 = \varepsilon > 0$,

ε 无論怎样小，在此閉曲面上我們都有 $|x_s(t)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$, $|x_s(t-\tau)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$, $|x(t)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}$, $|x(t-\tau)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}$.

因此，在这个閉曲面上，我們有下列的估值：

$$\left|\frac{dx_s}{dt}\right| \leqslant 2na\sqrt{\varepsilon} + M_s\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}$$

$$(\because X_s(x_1, \cdots, x_n, x) = (x_1, \cdots, x_n, x)_2),$$

其中 $M_s > 0$ 是常量；

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \leqslant M\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}} \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

$$(\text{因为 } X(x_1, \cdots, x_n, x) + Y(x_1, \cdots, x_n, x) = \\ = (x_1, \cdots, x_n, x)_2),$$

$M > 0$ 是常量。

应用上述的估值，在閉曲面 $H(x_1, \cdots, x_n, x) = \varepsilon$ 上我們有

$$\left|\frac{dY}{dt}\right| \leqslant \sum_{s=1}^{n}\left|\frac{\partial Y}{\partial x_s}\right|\left|\frac{dx_s}{dt}\right| + \left|\frac{\partial Y}{\partial x}\right|\left|\frac{dx}{dt}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} L_s\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\left(2na\sqrt{\varepsilon} + M_s\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right)$$

$$+ L\sqrt{\varepsilon} \cdot M\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\sqrt{\varepsilon} =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\sqrt{\varepsilon}\left[\sum_{s=1}^{n} L_s 2an + \sum_{s=1}^{n} L_s M_s\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right.$$

$$\left. + LM\sqrt{\varepsilon}\right] \leqslant L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}},$$

$L_0 > 0$ 常量。

同理，

$$\left|\frac{dY_s}{dt}\right| \leqslant \bar{L}_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}, \ \bar{L}_0 > 0 \text{ 常量.}$$

因此，

$$\left|\int_{t-\tau}^{t}\left|\frac{d}{dt}Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))\right|dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\tau,$$

$$\left|\int_{t-\tau}^{t}\frac{d}{dt}Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant \overline{L}_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\tau,$$

$$\left|\int_{t-\tau}^{t}\frac{dx_s(t)}{dt}dt\right|\leqslant\left[2na\sqrt{\varepsilon}+M_s\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right]\tau.$$

又由 $Q_i(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j$，記 $A=\max_{2\leqslant i\leqslant m}\{|A_{i1}|,\cdots,|A_{in}|\}$ $(i=2,\cdots,m)$，所以

$$\left|\frac{\partial Q_i}{\partial x_s}\right|\leqslant A,\ |Q_i(x_1,\cdots,x_n)|\leqslant A\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

因此在閉曲面 $H(x_1,\cdots,x_n,x)=\varepsilon$ 上我們亦有

$$|[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m]|\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\times$$

$$\times\left[|l+g|+nA\sqrt{\varepsilon}\left(2+3\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cdots+m\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{m-2}{m+1}}\right)\right]\leqslant M_0\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}},$$

$M_0>0$ 常量.

再有 $W(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}x_ix_j$ 是負定的二次型，記 $B=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{|B_{ij}|\}$，所以

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x_s}\right|_{H=\varepsilon}\leqslant nB\sqrt{\varepsilon}.$$

总結上述討論，在閉曲面 $H(x_1,\cdots,x_n,x)=\varepsilon$ 上我們有

$$
\begin{aligned}
1)\ &\left|\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right)\times\right.\\
&\left.\times\left(\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\int_{t-\tau}^{t}\frac{dx_\sigma(t)}{dt}dt+\int_{t-\tau}^{t}\frac{d}{dt}Y_s(x_1,\cdots,x_n,x)dt\right)\right|\leqslant\\
&\leqslant\sum_{s=1}^{n}(nB\sqrt{\varepsilon}+Ax^2(1+x+\cdots+x^{m-2}))\times\\
&\times\left[\sum_{\sigma=1}^{n}a\left(2na+M_t\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right)\sqrt{\varepsilon}+\right.\\
&\left.+\bar{L}_0\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\sqrt{\varepsilon}\right]\tau\leqslant\sum_{s=1}^{n}\left(nB\sqrt{\varepsilon}+\right.\\
&+A\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{2}{m+1}}\left(1+\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}+\cdots+\right.\\
&\left.\left.+\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{m-2}{m+1}}\right)\right)\cdot\left[\sum_{\sigma=1}^{n}a\left(2na+M_t\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right)+\right.\\
&\left.+\bar{L}_0\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right]\sqrt{\varepsilon}\cdot\tau\leqslant\varepsilon\cdot\tau G_0,\quad G_0>0.
\end{aligned}
$$

注意上式中两个括弧里的項相乘是 $2n^2a^2+$ 有限量（这因 ε 可任意小），所以我們总可取到 G_0（与 ε 无关的量）来控制上述乘积的結果. 前面的 $\bar{L}_0$, L_0, M_t 等常量都具有 G_0 的性質，因此它們亦是与 ε 无关的.

$$
\begin{aligned}
2)\ &\left|[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+\right.\\
&\left.+mx^{m-1}Q_m]\left(\int_{t-\tau}^{t}\frac{d}{dt}Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\right)\right|\leqslant\\
&\leqslant M_0\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\delta\leqslant M_0L_0\tau\varepsilon,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\left|[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m]\left(\int_{t-\tau}^{t}\frac{dY}{dt}dt\right)+\right.
$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\int_{t-\tau}^{t}\frac{dx_\sigma}{dt}\,dt+\int_{t-\tau}^{t}\frac{dY_s}{dt}\right)\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant M_0L_0\tau\varepsilon+\varepsilon\tau\cdot G_0=(M_0L_0+G_0)\tau\varepsilon=G\tau\varepsilon$$

$$(G=M_0L_0+G_0).$$

由于 $[(g+l)^2+F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^{m+1}+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,$ $x_1,\cdots,x_n)\,x_\alpha x_\beta$ 在原点的充分小邻域內是正定的，所以我們只要把坐标原点的邻域取得这样小，使得

$$[(g+l)^2+F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^{m+1}+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,x_1,\cdots,x_n)x_\alpha x_\beta\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left[(g+l)^2x^{m+1}+\sum_{s=1}^{n}x_s^2\right].$$

故任意給一个閉曲面

$$H(x_1,\cdots,x_n,x)=(g+l)^2x^{m+1}+\sum_{s=1}^{n}x_s^2=\varepsilon\quad\varepsilon>0,$$

无論怎样小，我們都可以找到 Δ，我們只要作

$$G\tau\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon,\ \text{即}\ \tau\leqslant\frac{1}{2G}.$$

即取 $\Delta=\dfrac{1}{2G}>0$ 与 ε 无关，使当 $0\leqslant\tau\leqslant\Delta$ 时，则(1.2)′的零解是稳定的。 下面我們更进一步的来証明 (1.2)′ 的零解，当 $0\leqslant\tau\leqslant\Delta$ 时是漸近稳定的。

由于

$$V(t)=V(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))=$$

$$=\frac{1}{2}(g+l)x^2+W(x_1,\cdots,x_n)+$$

$$+x^2Q_2(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+x^mQ_m(x_1,\cdots,x_n)$$

是負定的，故 $V(t)\leqslant 0$. 根据前面的討論得知，当 $-\tau\leqslant t\leqslant 0$ 时，給出 $x_s(t)$ 是連續的，則在 $t\geqslant 0$ 时，$\frac{dV}{dt}$ 存在是連續的，即函数 $V(t)$ 是平滑的. 如果我們現在令由初始时 $-2\tau\leqslant t\leqslant 0$ 所确定的方程組(1.2)′的解 $x_s(t)$ 是連續的，則由 $\frac{dV}{dt}$ 的性質知，

$$\max_{-2\tau\leqslant t\leqslant 0} V(t)\leqslant V(t)(t\geqslant 0)\leqslant 0. \tag{2.3}$$

下面我們来証明漸近穩定性.

(i) 函数 $V(t)$ 不能从某个 $t>t_0$ 之后单調的減少.

証. 用反証法. 假如从某个 $t>t_0$ 之后，$V(t)$ 是单調的減少，則由性質 (2.3) 知，单調下降有界的函数必有极限. 所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)=-\varepsilon_1<0$. 这就說明了

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{dV}{dt}=\lim_{t\to\infty}\Bigg\{&[(l+g)^2+F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^{m+1}+\\
&+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x_1,\cdots,x_n,x)x_\alpha x_\beta-\\
&-[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m]\times\\
&\times\left(\int_{t-\tau}^{t}\frac{d}{dt}Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\right)-\\
&-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right)\left(\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\times\right.\\
&\left.\times\int_{t-\tau}^{t}\frac{dx_\sigma(t)}{dt}dt+\int_{t-\tau}^{t}\frac{d}{dt}Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\right)\Bigg\}\geqslant\\
&\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon_1-G\delta\varepsilon_1=\left(\frac{1}{2}-G\tau\right)\varepsilon_1>0.
\end{aligned}$$

故当 t 充分大时，則有 $\frac{dV}{dt}>0$，也即是說当 t 充分大时，函数 $V(t)$ 不是单調減少的，这与假設矛盾. 故函数 $V(t)$ 不能从某个 $t>t_0$ 之后单調的減少.

(ii) 函数 $V(t)$ 如果从某个 $t>t_0$ 之后是单調的增加，則 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)=0$.

証. 用反証法. 如果从某个 $t > t_0$ 之后，$V(t)$ 是单調增加，但 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) \neq 0$，即 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = -\varepsilon^* < 0$，則我們就应有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dV}{dt} = 0.$$

但另一方面，按照前面的討論我們又有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dV}{dt} \geqslant \left(\frac{1}{2} - \tau G\right)\varepsilon^* > 0.$$

由此即导出矛盾. 故当 $V(t)$ 是单調增加时，則 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = 0$，这就說明(1.2)'之零解是漸近穩定的.

(iii) 最后要研究的是：当 $t \to +\infty$，函数 $V(t)$ 既不是单調的增加，亦不是单調的減少，即函数 $|V(t)|$ 随着时間的增大出現无限个相对的极大值（因 $V(t)$ 是平滑的）. 下面要証的即是当 $t \to +\infty$ 时，这些相对的极大值趋于零. 証明了这一点也就証明了(1.2)'的零解是漸近穩定的.

証. 設在 $-2\delta \leqslant t \leqslant 0$ 函数 $V(t)$ 的最大值为 $M < 0$，則由性質(2.3)知

$$M = \max_{-2\tau \leqslant t \leqslant 0} V(t) \leqslant V(t) \leqslant 0, \quad (t \geqslant 0).$$

为方便起見，我們不妨取 $\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2G}\right)$. 設 $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$. 在 $t > 0$ 之后函数 $V(t)$ 之第一个极大値設在 $t_1 > 0$ 处，則

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} = 0 = \Big\{\left[(l+g)^2 + F(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t))\right] x^{m+1} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} x_s^2(t) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t)) x_\alpha(t) x_\beta(t) -$$

$$-\left[(l+g)x(t) + 2xQ_2 + \cdots + mx^{m-1}Q_m\right] \times$$

$$\times \left(\int_{t-\tau}^{t} \frac{d}{dt} Y(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t))\, dt\right) -$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s} + x^2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_s} + \cdots + x^m \frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right)\left(\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} \int_{t-\tau}^{t} \frac{dx_\sigma}{dt} dt +\right.$$

$$\left.\left. + \int_{t-\tau}^{t} \frac{d}{dt} Y_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t))\, dt\right)\Big\}\right|_{t=t_1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}[(l+g)^2x^{m+1}+\sum x_i^2]_{t=t_1}-G\delta|M|\geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[(l+g)^2x^{m-1}(t)+\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)\right]_{t=t_1}-G\Delta|M|,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}H(x_1(t_1),\cdots,x_n(t_1),x(t_1))\leqslant G\Delta|M|,$$

即

$$H(x_1(t_1),\cdots,x_n(t_1),x(t_1))\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|M|}{2}G\Delta=\frac{1}{2}\left(\frac{|M|}{4}\right)=\frac{|M|}{2\cdot 4}.$$

这样在 $t\geqslant t_1+2\delta$ 后之第一个相对的极大値 t_2 处我們有

$$H(x_1(t_2),\cdots,x_n(t_2),x(t_2))\leqslant\frac{1}{2^2}\left(\frac{|M|}{4}\right).$$

因为当 $t\to+\infty$ 时，出現无限多个相对的极大値，因此象上面这样継續的作下去，卽得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|M|}{2^{n+2}}=0,$$

卽 $\lim\limits_{t\to\infty}H(t)=0$. 因为 $H(t)=\frac{1}{2}\left[(l+g)^2x^{m+1}(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2(t)\right]$ 是正定的，故

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0 \qquad \lim_{t\to\infty}x_i(t)=0.$$

定理証毕.

3）不稳定性的等价定理

由 2)的討論知，当 $\tau=0$ 时，如果 m 是奇数，而 $g+l>0$，則 (1.2)′的零解是不稳定的. 这是因为

$$V=\frac{1}{2}(g+l)x^2+W(x_1,\cdots,x_n)+x^2Q_2(x_1,\cdots,x_n)+$$
$$+\cdots+x^mQ_m(x_1,\cdots,x_n)$$

是变号的，而 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)'}$ 是正定的. 象前面一样，我們得到：任給 $H=\varepsilon>0$，ε 无論怎样小，一定存在 $\Delta=\frac{1}{2G}>0$ 与 ε 无关，使当

$0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$ 时，则(1.2)′的零解亦是不稳定的. 总結得下列定理

定理 2. 設 m 是奇数，$g+l>0$，則存在一正数 $\Delta=\Delta(X, Y, p_{s\sigma}, q_{s\sigma}, X_s, Y_s)>0$，使当 δ 滿足不等式 $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$ 时，則(1.2)′零解亦是不稳定.

定理 3. 設 m 是偶数，$g+l \neq 0$，則存在一正数 $\Delta=\Delta(X, Y, p_{s\sigma}, q_{s\sigma}, X, Y)>0$，使当 δ 滿足不等式 $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$，則(1.2)′的零解不稳定.

証. 当 $\tau=0$ 时，如果 m 是偶数且 $g+l \neq 0$，則(1.1)′的零解是不稳定的. 因此存在李雅普諾夫函数

$$V(x_1, \cdots, x_n, x)=\alpha^2(g+l)x+W(x_1, \cdots, x_n)+ \\ +xQ_1(x_1, \cdots, x_n)+\cdots+x^{m-1}Q_{m-1}(x_1, \cdots, x_n),$$

这里 $Q_i(x_1, \cdots, x_n)=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \ (i=1, 2, \cdots, m-1)$，$W(x_1, \cdots, x_n)$ 与定理 1 中所述的一样. 而 α 是这样小的实常数，它使得函数

$$\mathscr{F}(x_1, \cdots, x_n, x)=[\alpha^2(l+g)^2+F(x_1, \cdots, x_n, x)]x^m+ \\ +\alpha^2 g(X^{(2)}(x_1, \cdots, x_n)+Y^{(2)}(x_1, \cdots, x_n))+ \\ +\sum_{s=1}^{n} x_s^2+\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}(x, x_1, \cdots, x_n)x_\alpha x_\beta$$

是正定的，其中 $X^{(2)}(x_1, \cdots, x_n)$，$Y^{(2)}(x_1, \cdots, x_n)$ 分別是函数 $X(0, x_1, \cdots, x_n)$，$Y(0, x_1, \cdots, x_n)$中所有包含自变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的二次项的全体.

V 对 t 的微商为

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt}=[\alpha^2(g+l)+ \\ +Q_1(x_1, \cdots, x_n)+2xQ_2(x_1, \cdots, x_n)+\cdots+ \\ +(m-1)x^{m-2}Q_{m-1}(x_1, \cdots, x_n)]\frac{dx}{dt}+ \\ +\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x\frac{\partial Q_1}{\partial x_s}+\cdots+x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right)\frac{dx_s}{dt}=$$

$$
\begin{aligned}
&= [\alpha^2(l+g)^2 + F(x, x_1, \cdots, x_n)]x^m + \\
&\quad + \alpha^2 g[X^{(2)}(x_1, \cdots, x_n) + Y^{(2)}(x_1, \cdots, x_n)] + \\
&\quad + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}(x, x_1, \cdots, x_n)x_\alpha x_\beta - \\
&\quad - \Big\{[\alpha^2(g+l) + Q_1 + 2xQ_2 + \cdots + \\
&\quad + (m-1)x^{m-2}Q_{m-2}]\int_{t-\tau}^{t} \frac{dY}{dt}\,dt + \\
&\quad + \left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s} + x\frac{\partial Q_1}{\partial x_s} + \cdots + x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right)\right] \times \\
&\quad \times \left[\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}\int_{t-\tau}^{t}\frac{dx_\sigma}{dt}\,dt + \int_{t-\tau}^{t}\frac{dY_s}{dt}\,dt\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

象前面一样的来估計 τ，使得它能保証 $\frac{dV}{dt}$ 的正定性。

任給閉曲面

$$
\begin{aligned}
H(x, x_1, \cdots, x_n) &= \alpha^2(g+l)^2x^m + \alpha^2 g[X^{(2)}(x_1, \cdots, x_n) + \\
&\quad + Y^{(2)}(x_1, \cdots, x_n)] + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

无論 $\varepsilon > 0$ 怎样小，在此閉曲面上总有下列的估值:

$$
\begin{aligned}
&|\alpha^2(g+l) + Q_1 + 2xQ_2 + 3x^2Q_3 + \cdots + \\
&\quad + (m-1)x^{m-2}Q_{m-1}| \leqslant |\alpha^2(g+l)| + \\
&\quad + nA\sqrt{\varepsilon}(1 + 2|x| + \cdots + \\
&\quad + (m-1)|x|^{m-2}) \leqslant \\
&\leqslant \alpha^2|g+l| + nA(m-1)\sqrt{\varepsilon}\times \\
&\times \left(1 + \sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}} + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{m-2}{m}}\right) = \\
&= \alpha^2|g+l| + nA(m-1)\sqrt{\varepsilon}\times \\
&\times \frac{1 - \left(\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}}\right)^{m-1}}{1 - \sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}}} \leqslant L_1,
\end{aligned}
$$

L_1常量与 ε 无关。

$$\left|\frac{dY}{dt}\right| \leqslant L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$\left|\frac{dY_s}{dt}\right| \leqslant \bar{L}_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$\left|\frac{dx_s}{dt}\right| \leqslant 2na\sqrt{\varepsilon} + M_s\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \leqslant M\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2\alpha^2}\right)^{\frac{1}{m}}\sqrt{\varepsilon},$$

$$\left|\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s} + x\frac{\partial Q_1}{\partial x_s} + \cdots + x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial W}{\partial x_s}\right| + |x|\left|\frac{\partial Q_1}{\partial x_s}\right| + \cdots + \left|x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n}\left[nB\sqrt{\varepsilon} + A\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1-\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)}\right)^{\frac{1}{m}}}\right)\right] \leqslant E_1\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}},$$

其中 $E_1 > 0$ 与 ε 是无关常量，再注意 $m \geqslant 2$.

总結上述討論，即得

$$\left\{[\alpha^2(g+l) + Q_1 + 2xQ_2 + \cdots + (m-1)x^{m-2}Q_{m-2}] \times\right.$$

$$\times \int_{t-\tau}^{t}\frac{dY}{dt}dt + \left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s} + x\frac{\partial Q_1}{\partial x_s} + \cdots +\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+ x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right)\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\int_{t-\tau}^{t}\frac{dx_\sigma}{dt}dt + \int_{t-\tau}^{t}\frac{dY_s}{dt}dt\right]\right\}_{H=\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant L_1L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\tau + E_1\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}} \times$$

$$\times\left[2n^2\alpha^2\sqrt{\varepsilon}+naM_i\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\tau+M\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\tau\right]\leqslant[L_1L_0+2n^2a^2E_1+$$

$$+(\text{有限常量})]\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\tau\leqslant G\tau\cdot\varepsilon,$$

这里 $G>0$ 与 ε 无关。

同样的，我們只要把坐标原点的邻域取得如此的小，使得

$$[\alpha^2(g+l)^2+F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^m+$$

$$+\alpha^2g[X^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)+Y^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)]+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,\cdots,x_n,x)x_\alpha x_\beta\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}[\alpha^2(g+l)^2+F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^m+$$

$$+\alpha^2g(X^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)+Y^{(2)}(x_1,\cdots,x_n))+\sum_{s=1}^{n}x_s^2.$$

故任給 $H(x,x_1,\cdots,x_n)=\varepsilon>0$，都可找到 $\Delta=\frac{1}{2G}$（因为只要作 $G\tau\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon$ 即可），使当 $0\leqslant\tau\leqslant\Delta$ 时，則(1.2)′的零解不稳定．定理証毕。

4）一般情形，即

$$p_s\neq0,q_s\neq0\quad(s=1,2,\cdots,n).$$

我們記

$$f_s(x,x_1,\cdots,x_n)\equiv\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t)+(p_s+q_s)x(t)+$$

$$+X_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))+Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))=0.$$

$$(s=1,2,\cdots,n).\tag{4.1}$$

由 $f_s(0,0,\cdots,0)=0\quad(s=1,2,\cdots,n)$，且

$$\left\{\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right\}\Bigg|_{\substack{x=x_j=0\\ j=1,2,\cdots,n}}=|p_{ik}+q_{ik}|\neq0.$$

根据隐函数存在定理，由方程組(4.1)我們可解得

$$x_s = u_s(x) = A_s^{(1)}x + A_s^{(2)}x^2 + \cdots \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{4.2}$$

这里 $A_s^{(i)}$ 是常量．在 $|x|$ 充分小时，$u_s(x)$ 是 x 的全純函数．对方程組(1)我們作变换

$$x_s = \xi_s + u_s(x) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{4.3}$$

卽得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x, \xi_1, \cdots, \xi_n) + Y(x, \xi_1, \cdots, \xi_n), \\ \dfrac{d\xi_s}{dt} = \displaystyle\sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} + q_{s\sigma})\xi_\sigma + X_s(x, \xi_1, \cdots, \xi_n) + \\ \qquad + Y_s(x, \xi_1, \cdots, \xi_n) \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{4.4}$$

对(4.4)而言：

(i) 当 $g + l < 0$，m奇数，存在負定的李雅普諾夫函数

$$V(x, \xi_1, \cdots, \xi_n) = \frac{1}{2}(g + l)x^2 + W(\xi_1, \cdots, \xi_n) + $$

$$+ x^2Q_2(\xi_1, \cdots, \xi_n) + \cdots + x^mQ_m(\xi_1, \cdots, \xi_n).$$

所以对方程組(1)而言，在同样的假定下，存在李雅普諾夫函数

$$V(x, x_1 - u_1(x), \cdots, x_n - u_n(x)) = \frac{1}{2}(g + l)x^2 +$$

$$+ W(x_1 - u_1(x), \cdots, x_n - u_n(x)) + x^2Q_2(x_1 -$$

$$- u_1(x), \cdots, x_n - u_n(x)) + \cdots + x^mQ_m(x_1 -$$

$$- u_1(x), \cdots, x_n - u_n(x)). \tag{4.5}$$

因为 $W(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \sum_{ij=1}^{n} c_{ij}\xi_i\xi_j$ 是負定的二次型；

$$Q_i(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\xi_j = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} A_{ij}u_j(x)$$

$$(i = 2, \cdots, n),$$

所以

$$x^kQ_k(x_1 - u_1(x), \cdots, x_n - u_n(x)) =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} A_{kj}(x_j - u_j(x))\right] x^k,$$

$$W(x_1-u_1(x),\cdots,x_n-u_n(x))=\sum_{ij=1}^{n}c_{ij}x_ix_j+$$

$$+\sum_{ij=1}^{n}c_{ij}u_iu_j-\sum_{ij=1}^{n}c_{ij}(x_iu_j+x_ju_i).$$

我們記

$$G(x)=-x^2Q_2(u_1(x),\cdots,u_n(x))-x^3Q_3(u_1(x),\cdots,$$
$$u_n(x))-\cdots-x^mQ_m(u_1(x),\cdots,u_n(x)),$$

显見 $G(x)$ 的首項次数不低于 3. 因此(4.5)可改写为

$$V^*(x,x_1,\cdots,x_n)=V(x,x_1-u_1(x),\cdots,x_n-u_n(x))=$$
$$=\frac{1}{2}(g+l)x^2+W(x_1,\cdots,x_n)+W(u_1(x),\cdots,$$
$$u_n(x))-\sum c_{ij}(x_iu_j(x)+x_ju_i(x))+x^2Q_2(x_1,\cdots,$$
$$x_n)+x^3Q_3(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+$$
$$+x^mQ_m(x_1,\cdots,x_n)+G(x). \tag{4.6}$$

因为我們所作的变换(4.3)是拓扑变换，它把定号函数仍旧变到定号函数，所以 $V^*(x,x_1,\cdots,x_n)$ 亦是确定在坐标原点的充分小的邻域内的負定的函数. 为了簡便起見，我們記

$$W(u_1(x),\cdots,u_n(x))+G(x)=G_0(x).$$

显見 $G_0(x)$ 的首項次数不低于 2. 再令

$$U(x,x_1,\cdots,x_n)=-\sum_{ij=1}^{n}c_{ij}(x_iu_j(x)+x_ju_i(x)),$$

$U(x,x_1,\cdots,x_n)$ 的展式的首項次数(对 $x,x_1,\cdots,x_n$ 而言)不低于 2, 但 U 有这样的一个特性，即 $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\partial x_j}=0$. 因此(4.6)可簡写成下列形式：

$$V^*(x,x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}(g+l)x^2+W(x_1,\cdots,x_n)+$$

$$+G_0(x)+U(x,x_1,\cdots,x_n)+\sum_{k=2}^{m}x^kQ_k(x_1,\cdots,x_n).$$

对方程組(1.2)而言,我們作 V^* 关于 t 的全导数

$$\frac{dV^*}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V^*}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt}+\frac{\partial V^*}{\partial x}\frac{dx}{dt}=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s}+\frac{\partial U}{\partial x_s}+\sum_{k=2}^{m}x^kA_{k_s}\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}x_\sigma(t)+\right.$$

$$+q_{s\sigma}x_\sigma(t-\delta))+p_sx(t)+q_sx(t-\tau)+$$

$$+X_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))+$$

$$\left.+Y_s(x(t-\tau),x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau))\right]+$$

$$+\left[(g+l)x+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{dG_0}{dx}+\sum_{k=2}^{m}kx^{k-1}Q_k(x_1,\cdots,x_n)\right]\cdot$$

$$\cdot[X(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))+Y(x(t-\tau),$$

$$x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau))]=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s}+\frac{\partial U}{\partial x_s}+\sum_{k=2}^{m}A_{k_s}x^k\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t)+\right.$$

$$+(p_s+q_s)x(t)+X_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))+$$

$$\left.+Y_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))\right]+\left[(g+l)x+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{m}kx^{k-1}Q_k(x_1,\cdots,x_n)+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{dG_0}{dx}\right]\cdot$$

$$\cdot[X(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))+Y(x(t),x_1(t),\cdots,$$

$$x_n(t))]-\left\{\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s}+\frac{\partial U}{\partial x_s}+\sum_{k=2}^{m}A_{k_s}x^k\right]\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}(x_\sigma(t)-x_\sigma(t-\delta))+\right.$$

$$+q_s(x(t)-x(t-\tau))+Y_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))-$$

$$\left.-Y_s(x(t-\tau),x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau))\right]+$$

$$+\left[(l+g)x+\sum_{k=2}^{m}kx^{k-1}Q_k(x_1,\cdots,x_n)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{dG_0}{dx}\right]\cdot[Y(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))-$$

$$- Y(x(t-\tau), x_1(t-\tau), \cdots, x_n(t-\tau))]\Big\} =$$

$$= I(x, x_1, \cdots, x_n) - II(x, x_1, \cdots, x_n).$$

我們知道，当满足条件：m 为奇数与 $g + l < 0$，則(4.4)存在負定的李雅普諾夫函数

$$V(x, \xi_1, \cdots, \xi_n) = \frac{1}{2}(g+l)x^2 + W(\xi_1, \cdots, \xi_n) +$$

$$+ x^2 Q_2(\xi_1, \cdots, \xi_n) + \cdots + x^m Q_m(\xi_1, \cdots, \xi_n),$$

它对 t 的导数由(4.4)构成，即

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4.4)} = [(g+l)^2 + F(x, \xi_1, \cdots, \xi_n)]x^{m+1} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}(x, \xi_1, \cdots, \xi_n)\xi_\alpha\xi_\beta$$

为正定的. 然后把 ξ_s 用 $x_s - u_s(x)$ 来代换，卽得 $\frac{dV^*}{dt}$ 的第一部分，即

$$I(x, x_1, \cdots, x_n) \equiv \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s} + \sum_{k=2}^{m} A_{k_s}x^k + \frac{\partial U}{\partial x_s}\right] \times$$

$$\times \left[\sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} + q_{s\sigma})x_\sigma(t) + (p_s + q_s)x(t) + \right.$$

$$+ X_s(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t)) + Y_s(x(t), x_1(t), \cdots,$$

$$\left. x_n(t))\right] + \left[(g+l)x + \sum_{k=2}^{m} kx^{k-1}Q_k(x_1, \cdots, x_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dG_0(x)}{dx}\right] \cdot [X(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t)) +$$

$$+ Y(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t))].$$

因为(4.3)是拓扑变换，因此在 $x = x_1 = \cdots = x_n = 0$ 的充分小邻域内 $I(x, x_1, \cdots, x_n)$亦是正定的. 这样一来，我們只要选取充分小的 τ，使 $\frac{dV^*}{dt}$ 的第二部分不超过 $|I(x, x_1, \cdots, x_n)|$，亦卽选择充分小的 τ，使下列不等式成立：

$$|II(x, x_1, \cdots, x_n)| = \Bigg|\Bigg\{\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s} + \frac{\partial U}{\partial x_s} + \sum_{k=2}^{m} A_{ks}x^k\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}\int_{t-\tau}^{t}\frac{dx_\sigma(t)}{dt}dt + q_s\int_{t-\tau}^{t}\frac{dx(t)}{dt}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t-\tau}^{t}\frac{dY_s(x(t)、x_1(t)、\cdots、x_n(t))}{dt}dt\right] +$$

$$+ \left[(g + l)x + \sum_{k=2}^{m} kx^{k-1}Q_k(x_1, \cdots, x_n) + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dG_0}{dx}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\int_{t-\tau}^{t}\frac{dY(x(t)、x_1(t)、\cdots、x_n(t))}{dt}dt\right]\Bigg\}\Bigg| <$$

$$< |I(x, x_1, \cdots, x_n)|.$$

这样一来,我們就可建立类似于定理 1 的方程組(1.1)与(1.2)的等价性定理. 而对剩下的两种情形:

(ii) $g + l > 0$, m 是奇数;

(iii) $g + l \neq 0$, m 是偶数,

我們亦可建立类似于定理 2 与定理 3 的方程組(1)与(2)之間的不稳定性的等价性定理. 这里不再重述了.

§3. 第一临界情形,非綫性系統,奇異情形

当(1.1)′ 滿足条件

$$X(0, \cdots, 0, x) \equiv X_s(0, \cdots, 0, x) \equiv Y_s(0, \cdots, 0, x) \equiv$$
$$\equiv Y(0, \cdots, 0, x) = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

我們就称(1.1)′ 为奇异情形. 根据李雅普諾夫定理知,(1.1)′ 的零解在奇异情形永远稳定,但不是漸近稳定. 显見

$$x = c, x_1 = \cdots = x_n = 0 \qquad (1.1)$$

是(1.1)′的一解, c 是一个常量. 如果計 $c = 0$ 即得(1.1)′的零解; 这說明 (1.1)′ 的零解是属于一个参数的駐定运动族(1.1) 中,对应于 $c = 0$ 的一个駐定运动. 对 (1.1) 中之任一个駐定运动 (例如 $x = c_0, x_1 = \cdots = x_n = 0$), 如果我們把它当作未被扰动运动时, 它也具有 (1.1)′ 之零解的性質. 現在我們要問, 即当 $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$($\Delta$

为正常数)时，(1.2)′之零解是否亦具有上述(1.1)′之零解的性质呢？回答是肯定的，也就是説，在奇异情形下的微分方程与微分差分方程之間存在稳定性方面的等价性关系。下面我們就来論証这一点。

定理 4. 已知(1.1)′的平凡解是稳定的，则存在一正数

$$\Delta = \Delta(X,\ Y,\ p_{s\sigma},\ q_{s\sigma},\ X_s,\ Y_s) > 0,$$

使当 τ 满足不等式 $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$，则(1.2)′的平凡解亦是稳定的。

証. 将(1.2)′改写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} = {} & X(x, x_1, \cdots, x_n) + Y(x, x_1, \cdots, x_n) + \\
& + [Y(x(t-\tau(t)); x_1(t-\tau(t)), \cdots, \\
& x_n(t-\tau(t))) - Y(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t))], \\
\frac{dx_s(t)}{dt} = {} & \sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t) + X_s(x(t), x_1(t), \cdots, \\
& x_n(t)) + Y_s(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t)) + \\
& + \Big[\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(x_\sigma(t-\tau(t)) - x_\sigma(t)) + \\
& + Y_s(x(t-\tau(t)), x_1(t-\tau(t)), \cdots, \\
& x_n(t-\tau(t))) - Y_s(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t))\Big] \\
& (s = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

由条件 1°，知 $|p_{s\sigma} + q_{s\sigma} - \delta_{s\sigma}\chi| = 0\ (s, \sigma = 1, 2, \cdots, n)$ 的所有根 $\chi_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都具有負实部，即 $\operatorname{Re}(\chi_i) < 0 (i = 1, \cdots, n)$。因此任給負定的二次型

$$W(x_1, \cdots, x_n) = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2,$$

都存在正定的二次型 $V(x_1, \cdots, x_n)$，使

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left[\sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} + q_{s\sigma})x_\sigma\right] = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2. \tag{1.1$_1$}$$

所以

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\Big[\sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} + q_{s\sigma})x_\sigma + X_s(x, x_1, \cdots, x_n) +$$

$$+ Y_s(x, x_1, \cdots, x_n)\Big] = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \times$$

$$\times (X_s(x, x_1, \cdots, x_n) + Y_s(x, x_1, \cdots, x_n)). \qquad (1.1)_2$$

根据条件 $X_s(x, 0\cdots 0) \equiv Y_s(x, 0\cdots 0) \equiv 0$ 知,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(X_s(x, x_1, \cdots, x_n) + Y_s(x, x_1, \cdots, x_n)) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}(x, x_1, \cdots, x_n) x_\alpha x_\beta,$$

其中 $f_{\alpha\beta}(x, x_1, \cdots, x_n)$ 是 $x_1 x_s (s = 1, \cdots, n)$ 的解析函数,其展式的首項次数不低于 1, 即 $f_{\alpha\beta}(0, \cdots 0) = 0$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n)$. 因此,在原点的充分小邻域内,$(1.1)_2$是負定的.

我們借助于代換

$$\xi_s(t) = e^{\alpha t} x_s(t) \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

(这里 $\alpha > 0$ 待定),来变换方程(1.2)的后 n 个方程,即得

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \alpha e^{\alpha t} x_s + e^{\alpha t}\frac{dx_s}{dt} =$$

$$= \alpha\xi_s + e^{\alpha t}\Big\{\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma} + q_{s\sigma})x_\sigma + X_s(x, x_1, \cdots, x_n) +$$

$$+ Y_s(x, x_1, \cdots, x_n) + \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(x_\sigma(t - \delta(t)) - x_\sigma(t)) +$$

$$+ Y_s(x(t - \delta(t)), x_1(t - \delta(t)), \cdots, x_n(t - \delta(t))) -$$

$$- Y_s(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t))\Big\}.$$

注意 $e^{-\alpha t}\xi_s(t) = x_s(t)$, 所以

$$x_s(t - \delta) = \xi_s(t - \delta)e^{-\alpha(t-\delta)} = e^{\alpha\delta}e^{-\alpha t}\xi_s(t - \delta).$$

因此,将上述方程整理一下即得

$$\frac{d\xi_s(t)}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma} + q_{s\sigma} + \delta_{s\sigma}\alpha)\xi_\sigma +$$

$$+ e^{\alpha t}(X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) +$$

$$+ Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)) +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(e^{\alpha\delta}\xi_\sigma(t-\tau(t)) - \xi_\sigma(t)) + \\
&+ e^{\alpha t}[Y_s(e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_1(t-\tau(t)), \cdots, e^{-\alpha t}e^{\alpha\tau}\xi_n(t - \\
&- \tau(t)), x(t-\tau(t))) - Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1(t), \cdots, \\
&\quad e^{-\alpha t}\xi_n(t), x(t))] \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

根据(1.3),我們作 $V(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 的全导数

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} = &\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}\Big\{\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma} + q_{s\sigma} + \delta_{s\sigma}\alpha)\xi_s + \\
&+ e^{\alpha t}(X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) + \\
&+ Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)) + \\
&+ \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(e^{\alpha\delta}\xi_s(t-\tau) - \xi_s(t)) + \\
&+ e^{\alpha t}[Y_s(e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_1(t-\tau), \cdots, e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_n(t - \\
&- \tau), x(t-\tau)) - Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1(t), \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n(t), x(t))]\Big\} = \\
= &-\sum_{s=1}^{n}\xi_s^2 + 2\alpha V(\xi_1, \cdots, \xi_n) + \\
&+ e^{\alpha t}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \xi_s}[X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) + \\
&+ Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)] + \\
&+ \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \xi_s}\left[\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(e^{\alpha\delta}\xi_s(t-\tau) - \xi_s(t))\right] + \\
&+ e^{\alpha t}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \xi_s}[Y_s(e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_1(t-\tau), \cdots, e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_n(t - \\
&- \tau)x(t-\tau)) - Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1(t), \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n(t), x(t))] = \\
= &H(\xi_1(t), \cdots, \xi_n(t), x(t); \xi_1(t-\tau(t)), \cdots, \xi_n(t-\tau(t)), \\
&x(t-\tau(t))).
\end{aligned}
$$

我們可以选择 α 如此的小,使得

$$
-\sum_{s=1}^{n}\xi_s^2 + 2\alpha V(\xi_1, \cdots, \xi_n)
$$

为負定的二次型．另一方面，因为 $X_s(x, 0, \cdots, 0) \equiv 0$,

$$Y_s(x, 0, \cdots, 0) \equiv 0 \quad (s = 1, \cdots, n),$$

因此在区域

$$t \geqslant 0, |\xi_s| \leqslant \beta, |x| \leqslant \beta \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

內当 β 充分小时，我們有下列的估值：

$$\left| e^{\alpha t} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} [X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) + Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)] \right| \leqslant B\{|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|\}^2.$$

再由 $X_s Y_s$ 展式的首項次数不低于 2，我們有

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} [X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) + Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)\xi_\alpha\xi_\beta,$$

且

$$f_{\alpha\beta}(0, \cdots, 0) = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n),$$

故只要将 β 选取得适当小，卽可使得正数 B 任意的小（注意 B 的大小依賴于 β 的选取）．

因此由馬尔金[2]的引理知，我們可以选取 β 如此的小，使得函数

$$-\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 + 2\alpha V(\xi_1, \cdots, \xi_n) + e^{\alpha t} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} [X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) + Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)]$$

是負定的．我們現在假定正数 β 就是按照上述的要求选取的．由于函数 $H(\xi_1(t), \cdots, \xi_n(t), x(t); \xi_1(t-\tau(t)), \cdots, \xi_n(t-\tau(t)), x(t-\tau(t)))$ 当 $\tau = 0$ 时是負定的，根据連續性知存在正数 $\Delta > 0$，使当 $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$ 时，函数 $H(\xi_1(t), \cdots, \xi_n(t), x(t); \xi_1(t-\tau(t)), \cdots, \xi_n(t-\tau(t)), x(t-\tau(t)))$ 仍是負定的．至于 Δ 的估值仍如

前面所說的同样方法去估值，在这个估值中应注意的就是

$$e^{\alpha\delta}\xi_s(t-\tau)-\xi_s(t)=e^{\alpha\delta}\xi_s(t-\tau)-e^{\alpha\tau}\xi_s(t)+(e^{\alpha\delta}-1)\xi_s(t)=$$
$$=\delta\left[\alpha\left(1+\frac{\alpha\tau}{2!}+\frac{\alpha^2\tau^2}{3!}+\cdots\right)\xi_s(t)-e^{\alpha\tau}\xi_s'(t-(1-\theta)\tau)\right].$$

其它估值类似，即可算得

$$\Delta=\frac{1}{2nc_0[nM_2(\alpha+(3n+2)c_1+2M_1(1+e^{\alpha})+2M_2^2+e^{\alpha}\alpha)]},$$

其中 c_0, c_1, M_1, M_2 都是一些常数，即由

$$V(\xi_1\cdots\xi_n)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}c_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta,$$

可得

$$c_0=\max_{\alpha\beta=1\cdots n}|c_{\alpha\beta}|,\quad c_1=\max_{s,\sigma=1\cdots n}[|p_{s\sigma}|,|q_{s\sigma}|],$$
$$M_1=\max_{\substack{|\xi_s|\leqslant\beta\\|x|\leqslant\beta}}(|X_s|,|Y_s|,|X|,|Y|),\ (s=1,\cdots,n)$$
$$M_2=\max_{\substack{|x|\leqslant\beta\\|\xi_s|\leqslant\beta}}\left(\left|\frac{\partial Y_s}{\partial x_\sigma}\right|\left|\frac{\partial Y_s}{\partial x}\right|\right),\ (s=1,\cdots,n).$$

下面我們就来証明方程組 (1.3) 的平凡解当 $0\leqslant\tau\leqslant\Delta$ 时是稳定的.

考虑在初始时 $-\Delta\leqslant t\leqslant 0$，我們取初始函数 $\varphi(t)$，$\varphi_s(t)(s=1,\cdots,n)$满足不等式

$$|\varphi(t)|\leqslant\eta,\ |\varphi_s(t)|\leqslant\eta\quad(s=1,\cdots,n),$$

其中 $0<\eta<\beta$，而由此初始函数所确定的方程組(1.3)

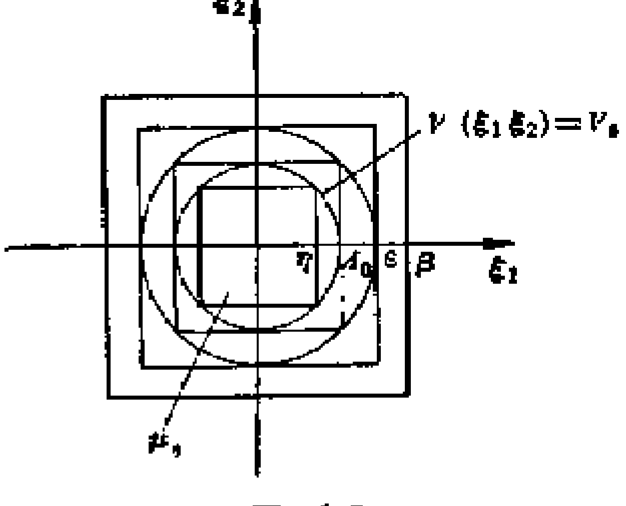


图 5.2

的解 $x(t),\xi_s(t)(s=1,2,\cdots,n)$至少在 $0\leqslant t\leqslant T$ 满足不等式

$$|\xi_s(t)|\leqslant\beta,\ |x(t)|\leqslant\beta\ (s=1,2,\cdots,n).$$

在这段时間区間 $0\leqslant t\leqslant T$ 上，当 $0\leqslant\tau\leqslant\Delta$ 时，我們有

$$\frac{dV}{dt}<0,$$

所以

$$V(\xi_1(T),\cdots,\xi_n(T)) = V(\xi_1^0,\cdots,\xi_n^0) + \\ + \int_0^T \frac{dV}{dt}dt < V(\xi_1^0,\cdots,\xi_n^0), \tag{1.4}$$

其中

$$\varphi_s(0) = \xi_s^0 \quad (s=1,2,\cdots,n),\ \varphi(0) = x_0.$$

因为 $V(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 是正定的，所以我們只要把初始函数 $\varphi_s(t)\varphi(t)$ 取得适当的小，则由(1.4)可推得，当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，有

$$|\xi_s(t)| < A_0 \quad (s=1,2,\cdots,n), \tag{1.5}$$

且常数 A_0 可以作得任意小，只要初始函数 $\varphi(t)$，$\varphi_s(t)$取得适当的小卽可。

另外我們再由(1.5)可推出，当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，对应于方程組(1.3)在 $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$ 时的解 $x_s(t)$ 滿足不等式

$$|x_s(t)| < A_0 e^{-\alpha t}. \tag{1.6}$$

由此卽知

$$|x_s(t-\tau)| < A_0 e^{\alpha\tau} e^{-\alpha t}. \tag{1.7}$$

从(1.6)与(1.7)，对函数 $X(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 及 $Y(x(t-\tau),x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau))$ 在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时作如下的正确估值：

$$\begin{aligned}&|X(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)) + Y(x_1(t-\tau),\cdots,\\ &x_n(t-\tau),x(t-\tau))| \leqslant |X(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)| + \\ &\quad + |Y(x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau),x(t-\tau))| \leqslant \\ &\quad \leqslant M_0A_0e^{-\alpha t} + M_1A_0e^{-\alpha t}e^{\alpha\tau} = (M_0 + M_1e^{\alpha\tau})A_0e^{-\alpha t},\end{aligned}$$

其中 M_0M_1 是正的常数. 因为由条件

$$X(x(t),0\cdots0) \equiv 0,\quad Y(x(t-\tau),0\cdots0) \equiv 0,$$

再根据方程組(1.2)的第一个方程知

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t (X(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)) + \\ + Y(x(t-\tau),x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau)))dt,$$

所以

$$|x(t)| < \varphi(0) + (M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}) A_0 \int_0^t e^{-\alpha t} dt =$$

$$= \varphi(0) + (M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}) A_0 \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) <$$

$$< \varphi(0) + (M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}) \frac{A_0}{\alpha}. \tag{1.8}$$

現在設 ε 是任意小的正数，在任何情况下，我們都假定它比 β 还要小. 这样一来，我們只要适当的选取 η，也即是把初始函数的变化区域取得适当的小，就可使得 A_0 比 ε 小，且还可以使得不等式(1.8)的右端比 ε 还要小. 这件事也是完全可以办到的，因为初始函数的变动区域取得适当小，就可使得 $\varphi(0)$ 与 A_0 任意的小，而 $\frac{M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}}{\alpha}$ 都是定常数，因此就可使

$$\varphi(0) + \frac{1}{\alpha}(M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}) A_0 < \varepsilon,$$

則从不等式(1.5)与(1.8)推出，对所有 $t \geqslant 0$ 的时間 t 而言，不等式

$$|\xi_s(t)| \leqslant \beta, \quad |x(t)| \leqslant \beta \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{1.9}$$

被滿足，不等式

$$|\xi_s(t)| < \varepsilon, \quad |x(t)| < \varepsilon \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{2.0}$$

也被滿足. 但因为 $\varepsilon < \beta$，因此不等式(1.9)与(2.0)是同时被滿足. 实际上，如果条件(1.9)在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时被滿足，而在以后的时間，如果要破坏这不等式，必定存在瞬时 $t_1 = t^* > T_0$，則在瞬时 $|x(t)|$ 与 $|\xi_s(t)|$ $(s = 1, \cdots, n)$ 中至少有一个达到 β 值. 然而这是不可能的，因为在这个瞬时，条件(2.0)还是要被保持的，因此所有的 $|\xi_s(t)|$, $|x(t)|$ 将小于 ε.

总之，如果在初始时 $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$，初始函数 $\varphi(t)$, $\varphi_s(t)$ $(s = 1, \cdots, n)$，滿足条件

$$|\varphi(t)| < \eta, \ |\varphi_s(t)| < \eta \quad (s = 1, \cdots, n),$$

則在以后的所有时間，即 $t \geqslant 0$ 的 t 将滿足不等式(2.0). 又由于 $\xi_s = e^{\alpha t} \cdot x_s$，故 $x_s(t) = e^{-\alpha t} \xi_s(t)$，所以

$$|x_i(t)| < e^{-\alpha t}\varepsilon \leqslant \varepsilon, \text{ 对 } t \geqslant 0.$$

此乃方程組(1.2)的平凡解当 $0 \leqslant \tau(t) \leqslant \Delta$ 时是稳定的. 定理証毕.

§4. 第二临界情形的反例

对第二临界情形,举了一个反例,不存在等价关系.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = y(t) + K(y(t) - y(t-\tau)), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -x(t) - K(x(t) - x(t-\tau)). \end{cases}$$

当 $\tau = 0$ 时是中心,当 $K < 0$, $\tau > 0$ 足够小时得到不稳定.

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 + K(1 - e^{-\tau\lambda}) \\ -1 - K(1 - e^{-\tau\lambda}) & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\lambda^2 + [1 + K(1 - e^{-\tau\lambda})]^2 = 0.$$

令 $\lambda = \xi(\tau) + i\eta(\tau)$, $\xi(0) = 0$, $\eta(0) = \pm i$, 则 $\lambda(0) = \pm i$.

我們有

$$2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + 2[1 + K(1 - e^{-\tau\lambda})]\left[Ke^{-\tau\lambda}\left(\lambda + \tau\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\right] = 0.$$

以 $\tau = 0$, $\lambda = \pm i$ 代入有

$$2(\pm i)\frac{d\lambda}{d\tau} + 2K(\pm i) = 0$$

或

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -K, \text{ 或 } \left.\frac{d\xi(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = -K, \text{ 或 } \left.\frac{d\eta(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0.$$

由此,当 $K < 0$ 时,τ 足够小($\tau > 0$),则

$$\xi(\tau) > 0.$$

由此得到不稳定.

另一方面也可以証明,当 $K > 0$ 时,τ 足够小($\tau > 0$),则

$$\xi(\tau) < 0.$$

因 $\tau = 0$ 时，有

$$2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + 2K\lambda = 0,$$

故

$$\left.\frac{d\lambda}{d\tau}\right|_{\tau=0} = -K$$

对所有虚軸上之点都成立。

第六章　全时滞系統的无条件稳定性

§1. 无条件稳定性的代数判定

定义. 已給一有时滞的常系数的系統

$$\frac{dx_s(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{sj}x_j(t)+b_{sj}x_j(t-\tau)\right) \tag{1.1}$$

$$(s=1,2,\cdots,n).$$

如果对任何 $\tau\geqslant 0$, (1.1) 之零解均为漸近稳定, 則称系統(1.1)为无条件稳定.

引入記号及特征方程

$$\Delta(\lambda;\tau)\equiv|a_{sj}+b_{sj}e^{-\tau\lambda}-\delta_{sj}\lambda|=0, \tag{1.2}$$

則有下之結果.

定理 1. 系統(1.1)为无条件稳定的充分必要条件是

(i) $$\Delta(\lambda;0)\equiv|a_{sj}+b_{sj}-\delta_{sj}\lambda|=0 \tag{1.3}$$

之根之实部均为負.

(ii) 对于任何实数 y 及任何实数 $\tau\geqslant 0$ 均有

$$\Delta(iy,\tau)\equiv|a_{sj}+b_{sj}e^{-\tau iy}-\delta_{sj}(iy)|\neq 0. \tag{1.4}$$

証. 条件是必要的. 因为如果条件(i)不成立, 則 $\tau=0$ 时, 系統(1.1)便不是漸近稳定的. 又如果有实数 y 及 $\tau\geqslant 0$ 使

$$\Delta(iy,\tau)=0,$$

則对这个 τ, 系統(1.1)有虛的特征根, 因此不是漸近稳定的. 必要性証毕.

充分性的証明是利用这样的事实, 即只需要証明对 $\tau\geqslant 0$, (1.2) 之特征根之实部都是負的即可.

将 $\Delta(\lambda;\tau)$ 展为 λ 之多項式:

$$\Delta(\lambda;\tau)\equiv(-1)^n\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\cdots+A_n=0,$$

此地 A_n 是 a_{sj}, b_{sj} 及 $e^{-\tau\lambda}$ 之多項式.

注意到 a_{sj}, b_{sj} 均为已給常数,且当 $\tau \geqslant 0$ 及 $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ 时,

$$|e^{-\tau\lambda}| \leqslant 1.$$

由此,在 $\tau \geqslant 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ 时 $|A_k|$ 为有界. 用 K_1 記此界:

$$K_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i|, \text{ 当 } \tau \geqslant 0, \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0.$$

取

$$R = \max(1, (n+1)K_1) > 0,$$

則当 $|\lambda| \geqslant R$ 及 $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$, 便有

$$\begin{aligned} &|(-1)^n\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n| \geqslant \\ &\geqslant |\lambda|^n \left[1 - \frac{|A_1|}{|\lambda|} - \cdots - \frac{|A_n|}{|\lambda|^n}\right] \geqslant \\ &\geqslant R^n \left[1 - \frac{nK_1}{(n+1)K_1}\right] > 0. \end{aligned}$$

由此可見,在 $|\lambda| \geqslant R$ 及 $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ 中,对任何 $\tau \geqslant 0$, (1.2)均无根. 故可不考慮这区域.

由条件(i)知,当 $\tau = 0$ 时,(1.2)之根都在 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ 半平面. 現当 $\tau \neq 0$ 时,特征根要在 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ 之可能性只有当某一 τ 时, λ 在 $-R$ 到 R 之間穿过 λ 平面上之虛軸(如图 6.1), 但是条件(ii)不容許(1.2)之根跑到 λ 平面之虛軸上,故这些特征根必然留在 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ 半平面. 充分性証毕.

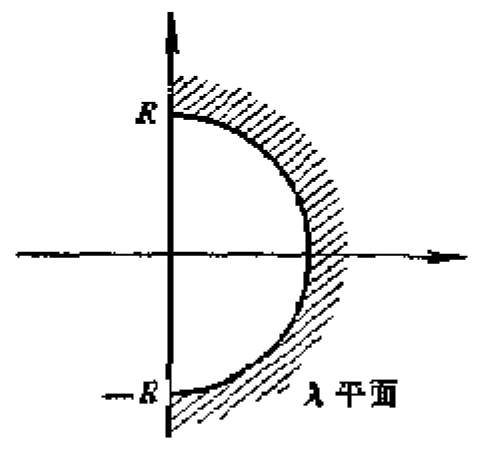


图 6.1

注意 1. 由証明可見条件(ii)可減弱到

$$-R < y < R,$$

而不必要 $-\infty < y < \infty$,这里实际上沒有区别.

注意 2. 条件(i)之判定有传統的路斯-霍尔維茨方法,因此全部問題归結到(ii)之研究.

現在轉到条件(ii)之分析.

这里又分两个方面: $y = 0$ 及 $y \neq 0$. 对 $y = 0$, 条件(ii)等

于

$$\Delta(i0,\tau) \equiv |a_{sj} + b_{sj}| \neq 0, \qquad (1.5)$$

对任何 τ 均一样，故不必討論，并且这一条件已包含于条件(i)中．对 $y \neq 0$，則引入我們解决問題的关鍵想法．这时由于 τ 是任意非負实数，$y \neq 0$，故当 τ 由 0 变到 $\left|\frac{2\pi}{y}\right|$ 时，$-\tau y$ 由 0 变到 $\pm 2\pi$，因此 $e^{-\tau iy}$ 在单位圓上繞了一周．这便說明对 $y \neq 0$，$e^{-\tau iy}$ 可作为与 y 无关之一値．更确切地說，引入

$$\omega = -\tau y,$$

則条件(ii)化为要求条件(1.5)及下述之条件：

对任何非零之实 y 及任何实 ω，

$$F(y, \omega) \equiv |a_{sj} + b_{sj}e^{i\omega} - \delta_{sj}(iy)| \neq 0. \qquad (1.6)$$

形式上看来，这里沒有消去超越函数 $e^{i\omega}$ 所引起的困难．但这里由于 ω 与 y 为独立变量，故可以由(1.6)将实部及虛部分开·

$$F(y, \omega) \equiv U(y, \omega) + iV(y, \omega). \qquad (1.7)$$

再命

$$U(y, \omega) = 0, \quad V(y, \omega) = 0, \qquad (1.8)$$

由(8)消去 ω（或 y）便得到 y（或 $\cos\omega$, $\sin\omega$）之多項式

$$H(y) = 0 \ (\text{或}\ H(\cos\omega, \sin\omega) = 0), \qquad (1.9)$$

这时只要判定两点：或者(1.9)式之 y 无非零的实根，这时(1.6)显然成立；或者(1.9)式之 y 虽有非零实根，但这种实根代入 (1.8) 时所得之方程組沒有实的公根 ω，則(1.6)也显然成立．并且要(1.6)成立，显然要判定这两点．

値得特别提出的是，判定这两点都是代数方程的問題，这里已經沒有超越方程的求根問題．

总結如下：

定理 2. 系統(1.1)为无条件稳定之充分必要条件是

(i) $$\Delta(\lambda;0) \equiv |a_{sj} + b_{sj} - \delta_{sj}\lambda| = 0 \qquad (1.3)$$

之根之实部均为負的．

(ii) (1.9) 式中或者 y 无非零实根，或者 y 有非零实根，但对此实的 y 値，(1.8)无公共实根 ω．

也可用下面的条件代替(ii)：

(ii)′ (1.9) 式中 ω 无实根，或 ω 虽有实根，但对此实的 ω 值，(1.8)无非零公共实公根 y。

现在举例来說明具体的运算过程及結果。

例 1. $n=1$ 时系統(1.1)的无条件稳定性

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)+bx(t-\tau),$$

$$\Delta(\lambda;\tau)\equiv a+be^{-\lambda\tau}-\lambda=0.$$

条件(i)即

$$\Delta(\lambda;0)=a+b-\lambda=0$$

之根 $\lambda=-(a+b)$ 有負实部，亦即

$$a+b<0.$$

条件(ii)便是

$$F(y,\omega)\equiv(a+b\cos\omega)+i(-y+b\sin\omega)\equiv$$
$$\equiv U(y,\omega)+iV(y,\omega).$$

由

$$U\equiv(a+b\cos\omega)=0$$

及

$$V\equiv(-y+b\sin\omega)=0,$$

消去例如 ω，便有

$$H(y)\equiv y^2+a^2-b^2=0.$$

要 $H(y)$ 无非零实根之充要条件是

$$b^2-a^2\leqslant 0.$$

其次对 $H(y)$ 有非零实根时，則

$$y^2=b^2-a^2>0.$$

故 $b\neq 0$，由此可由 $U=0$ 及 $V=0$ 得

$$\tan\omega=-\frac{y}{a}$$

对任何实 y，ω 均有实解，故 $U=0$ 及 $V=0$ 均有实的 ω 公根。

总結可得无条件稳定性之充要条件是

(i) $\quad a+b<0,$

(ii) $\quad b^2-a^2\leqslant 0.$

亦可写成

$$a+b<0,\ b-a\geq 0.$$

其无条件稳定区如图 6.2 中有直紋之部分所示.

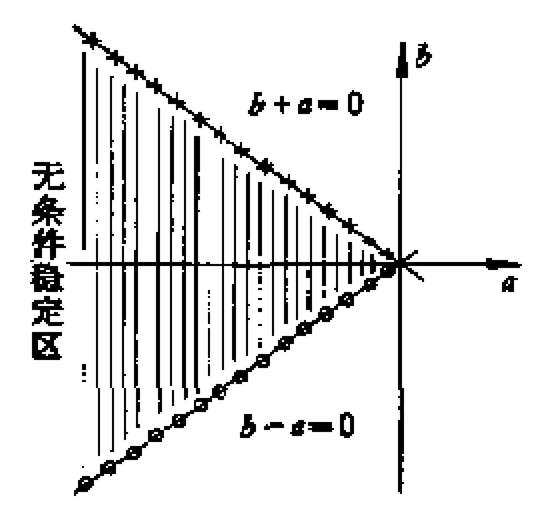


图 6.2

在边界 $b+a=0$ 上打(×)表示不是无条件稳定区中之点. 原点也属这类.

在边界 $b-a=0$ 上打(○)表示是无条件稳定区中之点.

其他之点均不属于无条件稳定区.

例 2. 具有时滞反饋的一个綫性振动系統为

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a\frac{dx(t)}{dt}+bx(t)+cx(t-\tau)=0,$$

$$\Delta(\lambda;\tau)\equiv\lambda^2+a\lambda+b+ce^{-\tau\lambda}=0.$$

条件(i)即

$$\Delta(\lambda;0)\equiv\lambda^2+a\lambda+(b+c)=0$$

之根之实部为負,亦即要求

$$a>0,\ b+c>0.$$

条件(ii)即

$$F(y,\omega)\equiv U(y,\omega)+iV(y,\omega)\equiv(-y^2+b+c\cos\omega)+$$
$$+i(ay+c\sin\omega).$$

由

$$U\equiv -y^2+b+c\cos\omega=0$$

及

$$V\equiv ay+c\sin\omega=0,$$

消去 ω 得到

$$H(y)\equiv y^4+y^2A+B=0,$$

此地

$$A=a^2-2b,\ B=b^2-c^2.$$

要 $F(y)=0$ 无非零实根，則因

$$y=\pm\sqrt{\frac{-A\pm\sqrt{A^2-4B}}{2}},$$

故其充要条件是

或者 $A^2-4B<0$,

或者 $A^2-4B=0$ 及 $A\geqslant 0$,

或者 $A^2-4B>0,\ B>0,\ A>0$,

或者 $A^2-4B>0,\ B=0,\ A\geqslant 0$.

也可簡化为

或者 $A\geqslant 0,\ B\geqslant 0$,

或者 $A<0,\ A^2-4B<0$.

至于 $F(y)=0$ 有非零之实根，則由 $V=0$ 可得出实的 ω，这个 ω 也将满足 $U=0$. 故不討論.

总結得到无条件穩定之充要条件是

(i) $a>0$,

$b+c>0$;

(ii) 命 $A=a^2-2b$,

$B=b^2-c^2$,

則下面两者之一成立:

或 $A\geqslant 0$ 及 $B\geqslant 0$,

或 $A<0,\ A^2-4B<0$.

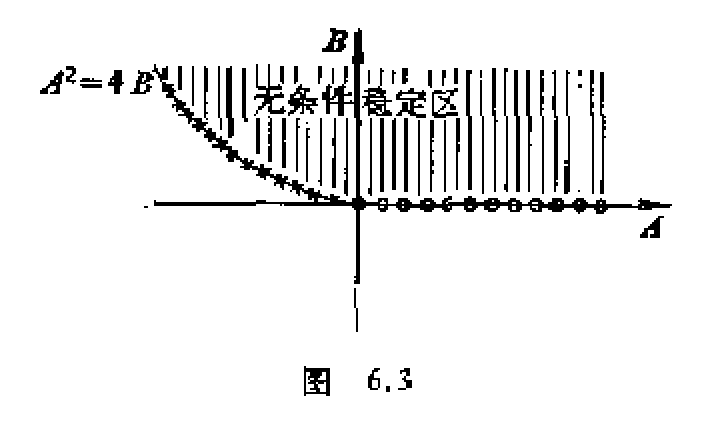


图 6.3

A 及 B 所满足之条件如图 6.3 所示.

§2. 二維系統的判定

为了解决 $n=2$ 时(1.1)之无条件稳定性，我們需要四次方程无实根之充要条件.

引理 1. 四次方程

$$f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0,$$

$a_0\neq 0$，沒有实根之充分必要条件是下列三种情形之一成立:

(甲) $a_1^2 > a_0a_2$.

并且下面二組条件之一成立：

(甲)$_1$ $\Delta > 0$,

(甲)$_2$ $\Delta = 0$,

$2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3 = 0$,

$-3a_1^4+6a_0a_1^2a_2-4a_0^2a_1a_3+a_4a_0^3=9[a_0a_2-a_1^2]^2$.

(乙) $a_1^2 = a_0a_2$, $\Delta > 0$.

(丙) $a_1^2 < a_0a_2$, $\Delta > 0$,

$-3a_1^4+6a_0a_1^2a_2-4a_0^2a_1a_3+a_4a_0^3>9[a_0a_2-a_1^2]$,

此地

$$\Delta \equiv I^3 - 27J^2 \equiv \frac{a_0^5}{256}\pi(x_i - x_j),$$

x_i 是 $f(x)$ 之四个根：

$$I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$

$$J = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

注意

$$-3a_1^4 + 6a_0a_1^2a_2 - 4a_0^2a_1a_3 + a_4a_0^3 = a_0^3f\left(-\frac{a_1}{a_0}\right).$$

証. 由普通方程式論知道

$\Delta < 0$, 則 $f(x) = 0$ 有两实根、两复根.

$\Delta > 0$, 則 $f(x) = 0$ 有四实根或四复根.

因此，只要判定 $\Delta \geqslant 0$ 时的情形.

为此，将 $f(x) = 0$ 之形式簡化，減少参数，以便討論.

因 $a_0 \neq 0$, 故原式可用 a_0 除之，得

$$x^4 + 4B_1x^3 + 6B_2x^2 + 4B_3x + B_4 = 0.$$

此地

$$B_1 = \frac{a_1}{a_0},\ B_2 = \frac{a_2}{a_0},\ B_3 = \frac{a_3}{a_0},\ B_4 = \frac{a_4}{a_0}.$$

引入变换

$$y = x + B_1,$$

则原方程化为

$$y^4 + 6C_2y^2 + 4C_3y + C_4 = 0,$$

此地

$$C_2 = B_2 - B_1^2,$$
$$C_3 = 2B_1^3 - 3B_1B_2 + B_3,$$
$$C_4 = -3B_1^4 + 6B_2B_1^2 - 4B_1B_3 + B_4.$$

以下将分为三种情形来研究：

$$C_2 > 0,\ C_2 = 0,\ C_2 < 0.$$

（甲）$C_2 > 0$ 之情形.

引入变换

$$y = Kz = \sqrt{C_2}z,$$

则方程化为

$$z^4 + 6z^2 + 4A_3z + A_4 = 0,$$

此地

$$A_3 = C_3K^{-3},\ A_4 = C_4K^{-4}.$$

对于这种特殊类型的四次方程，由于只有两个参数 A_3，A_4，我們便可在 (A_3, A_4) 参数平面上来作图. 对一个实 z，这个方程表示一条 A_3A_4 平面上之直綫，当 z 变动时，这些直綫在 A_3A_4 平面扫过的区域容易求出. 求这直綫族的包綫得到方程为

$$\Delta \equiv (A_4 + 3)^3 - 27(A_4 - 1 - A_3^2)^2 = 0.$$

这只要由目前

$$A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3,\ A_4$$

代入公式有

$$I = A_4 + 3,\ J = A_4 - 1 - A_3^2,$$

而 $\Delta \equiv I^3 - 27J^2$ 即得.

也可由

$$z^4 + 6z^2 + 4A_3z + A_4 = 0$$

及其微分

$$4z^3 + 12z + 4A_3 = 0$$

消去 z 得到.

$\Delta = 0$ 是一条高阶抛物綫如图 6.4. 这时有一点值得注意的是 $\Delta = 0$ 之图形除这抛物綫外，还有一个孤立点：

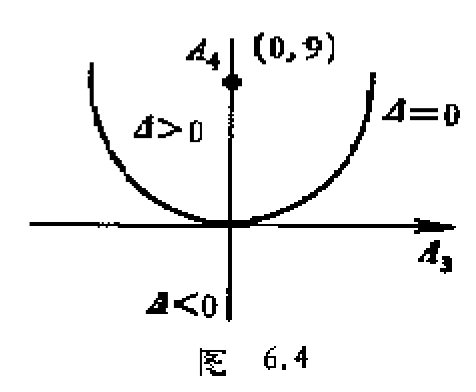


图 6.4

$$A_3 = 0, \quad A_4 = 9.$$

但这点没有实的 z 使直綫过此点，故这点所对应之方程也无实根.

总結如下：

情形(甲)无实根之充要条件是下列两情形之一成立：

(甲)$_1$ $\qquad \Delta > 0,$

(甲)$_2$ $\qquad \Delta = 0, \ A_3 = 0, \ A_4 = 9.$

这便是定理 3 所要的条件(甲)$_1$及(甲)$_2$.

(乙) $C_2 = 0$ 之情形. 方程已是

$$z^4 + 4A_3z + A_4 = 0$$

之形式，此地

$$A_3 = C_3, \quad A_4 = C_4.$$

这时由于

$$A_0 = 1, \ A_1 = A_2 = 0, \ A_3, \ A_4,$$

故有

$$I = A_4, \quad J = -A_3^2,$$

$$\Delta \equiv A_4^3 - 27A_3^4.$$

这时 $\Delta = 0$ 如图 6.5.

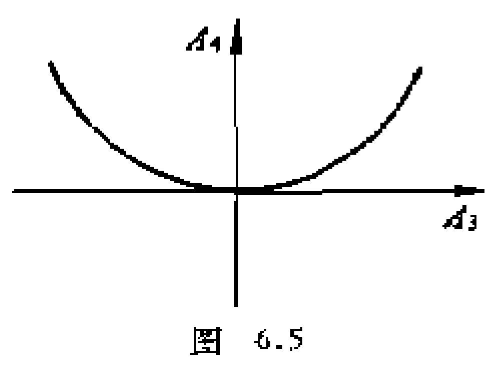


图 6.5

故所要的充要条件便是 $\Delta > 0$.

这便是引理中所要的(乙)之条件.

(丙) $C_2 < 0$ 之情形. 作变换

$$y = Kz = \sqrt{|C_2|}\, z,$$

則方程化为

$$z^4 - 6z^2 + 4A_3z + A_4 = 0,$$

此地

$$A_3 = C_3K^{-3},\ A_4 = C_4K^{-4}.$$

由于这时

$$A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ A_2 = -1,\ A_3,\ A_4,$$

便有

$$I = A_4 + 3,\ J = -A_4 + 1 - A_3^2,$$

$$\Delta \equiv (A_4 + 3)^3 - 27(-A_4 + 1 - A_3^2)^2,$$

这时 $\Delta = 0$ 如图 6.6 所示. 这时 $\Delta > 0$ 分为两个区域，在曲边三角形内部是四实根的区域，在 A_4 正方向的那二条曲綫所夹的部分是四复根区域. 外面其他部分是二实根二复根区域.

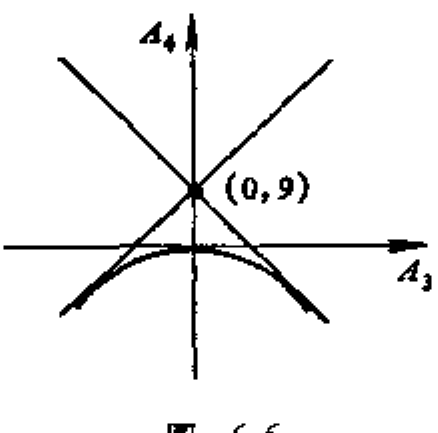


图 6.6

四实根与四复根之分界点在 $A_3 = 0,\ A_4 = 9$. 由此即得所要的无实根的充要条件是

$$\Delta > 0,\ A_4 > 9.$$

这便是引理 1 中(丙)的条件. 引理 1 証毕.

下面我們还要进一步研究

$$f(x) \equiv a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0,\ (a_0 \neq 0)$$

在 $|x| \leqslant 1$ 中无实根的充要条件.

用上面的作法，亦即要求

$$y^4 + 6C_2y^2 + 4C_3y + C_4 = 0$$

在 $B_1 - 1 \leqslant y \leqslant B_1 + 1$ 中无实根之充要条件.

以下仍分三种情形研究之.

(甲) $C_2 > 0$. 引入 $y = \sqrt{C_2}z$，即要求

$$L(z;\ A_3,\ A_4) \equiv z^4 + 6z^2 + 4A_3z + A_4 = 0$$

在

$$z_1 = \frac{B_1 - 1}{\sqrt{C_2}} \leqslant z \leqslant \frac{B_1 + 1}{\sqrt{C_2}} = z_2$$

中无实根. 引入

$$l(z) \equiv -z^3 - 3z,$$

注意当 z 在 $[z_1, z_2]$ 中变动时，A_3A_4 平面上之直綫 $L(z; A_3, A_4)=0$ 所扫过之区域如图 6.7 中之有斜紋之部分．因此，无实根之充要条件是 (A_3, A_4) 满足下面三組条件之一：

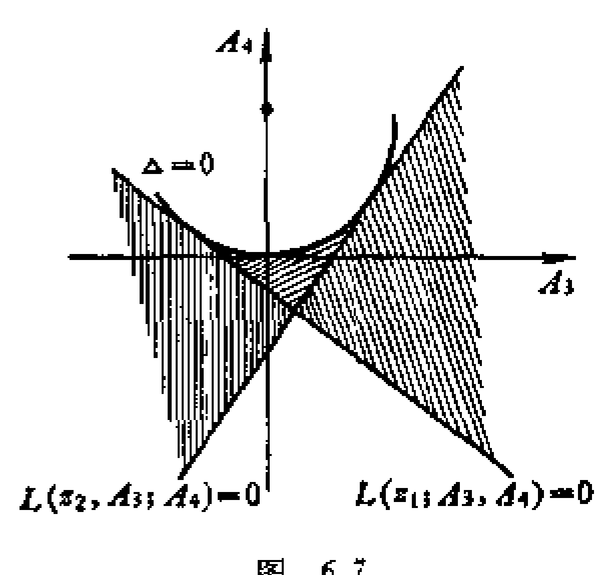


图 6.7

(甲)$_1$ $L(z_1; A_3, A_4) < 0$,

$L(z_2; A_3, A_4) < 0$;

(甲)$_2$ 当 $A_3 \geqslant l(z_2)$,

$L(z_2; A_3, A_4) > 0$,

当 $l(z_1) \leqslant A_3 \leqslant l(z_2)$,

$\Delta(A_3, A_4) > 0$,

当 $A_3 \leqslant l(z_1)$,

$L(z_1; A_3, A_4) > 0$;

(甲)$_3$ $A_3 = 0$, $A_4 = 9$. 故(甲)类之情形研究毕.

(乙) $C_2 = 0$. 此时

$$L(z; A_3, A_4) \equiv z^4 + 4A_3z + A_4 = 0,$$

$$z_1 = B_1 - 1,\ z_2 = B_1 + 1,$$

$$l(z) \equiv -z^3,$$

这时要方程无实根之充要条件是满足下列两組条件之一：

(乙)$_1$ $L(z_1; A_3, A_4) < 0$, $L(z_2; A_3, A_4) < 0$;

(乙)$_2$ 当 $A_3 \geqslant l(z_2)$, $L(z_2; A_3, A_4) > 0$,

当 $l(z_1) \leqslant A_3 \leqslant l(z_2)$, $\Delta(A_3, A_4) > 0$,

当 $A_3 \leqslant l(z_1)$, $L(z_1; A_3, A_4) > 0$.

最后研究情形(丙). $C_2 < 0$.

$$L(z; A_3, A_4) \equiv z^4 - 6z^2 + 4A_3z + A_4 = 0,$$

$$z_1 = \frac{B_1 - 1}{\sqrt{|C_2|}},\quad z_2 = \frac{B_1 + 1}{\sqrt{|C_2|}},$$

$$g(z) \equiv -z^3 + 3z,\ \Delta(A_3, A_4) \equiv (A_4 + 3)^3 - 27(-A_4 + 1 - A_3^2)^2,$$

这时 $z = \pm 1$ 及 $\pm\sqrt{3}$ 是四个分界点．这四个分界点中可能有一个，二个，三个或四个在区間 $[z_1, z_2]$ 中．也可能一个都不在 $[z_1, z_2]$

中．对不同之情形有不同的条件．

现在研究 A_3A_4 平面上之直綫 $L(z; A_3, A_4) = 0$ 当 $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ 时所扫过之区域．先作五种基本区域，再作一般情形．

第一类情形：$z_1 < z_2 \leqslant -\sqrt{3}$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$$L(z_1) \geqslant 0,\ L(z_2) \leqslant 0;$$
$$L(z_1) \leqslant 0,\ L(z_2) \geqslant 0;$$
$$L(z_1) \geqslant 0,\ L(z_2) \geqslant 0,\ \Delta \leqslant 0,$$
$$g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1).$$

第二类情形：$-\sqrt{3} \leqslant z_1 < z_2 < -1$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$$L(z_1) \leqslant 0,\ L(z_2) \geqslant 0;$$
$$L(z_1) \geqslant 0,\ L(z_2) \leqslant 0;$$
$$L(z_1) \geqslant 0,\ L(z_2) \geqslant 0,\ \Delta \geqslant 0,$$
$$g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1).$$

第三类情形：$-1 \leqslant z_1 < z_2 < 1$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$$L(z_1) \leqslant 0,\ L(z_2) \geqslant 0;$$
$$L(z_1) \geqslant 0,\ L(z_2) \leqslant 0;$$
$$L(z_1) \leqslant 0,\ L(z_2) \leqslant 0,\ \Delta \geqslant 0,$$
$$g(z_1) \leqslant A_3 \leqslant g(z_2).$$

第四类情形：$1 \leqslant z_1 < z_2 < \sqrt{3}$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$$L(z_1) \leqslant 0,\ L(z_2) \geqslant 0;$$
$$L(z_1) \geqslant 0,\ L(z_2) \leqslant 0;$$
$$L(z_1) \geqslant 0,\ L(z_2) \geqslant 0,\ \Delta \geqslant 0,$$
$$g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1).$$

第五类情形：$\sqrt{3} \leqslant z_1 < z_2$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$$L(z_1) \leqslant 0,\ L(z_2) \geqslant 0;$$

$$L(z_1) \geqslant 0,\ L(z_2) \leqslant 0;$$
$$L(z_1) \geqslant 0,\ L(z_2) \geqslant 0,\ \Delta \leqslant 0,$$
$$g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1).$$

研究了这五种类型,则一般情形是用下面方法得到的:

$\pm\sqrt{3}$, ± 1 四点将 $[z_1, z_2]$ 分为若干段,每段利用上面的一种作法得到三块区域.这些区域之全体总和便是在 A_3A_4 平面上(当 z 在 $[z_1, z_2]$ 变动时)$L(z; A_3, A_4) = 0$ 直綫扫过之全部面积.

$\pm\sqrt{3}$, ± 1 四点与 $[z_1, z_2]$ 之关系可有 $\sum_{i=1}^{5} i = 15$ 种可能的組合,其他五种已如上述,其他十种可由上面五种組成.

为了书写簡单起見,我們引入三个記号: $R_1(\alpha, \beta)$ 表示 A_3A_4 平面上下面两种点的全体:

$$L(\alpha; A_3, A_4)L(\beta; A_3, A_4) \leqslant 0$$

及

$$L(\alpha; A_3, A_4) \geqslant 0,\ L(\beta; A_3, A_4) \geqslant 0,$$
$$\Delta(A_3, A_4) \leqslant 0,\ g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1).$$

$R_2(\alpha, \beta)$ 表示 A_3A_4 平面上下面两种点的全体:

$$L(\alpha; A_3, A_4)L(\beta; A_3, A_4) \leqslant 0$$

及

$$L(\alpha; A_3, A_4) \geqslant 0,\ L(\beta; A_3, A_4) \geqslant 0,$$
$$\Delta(A_3, A_4) \geqslant 0,\ g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1).$$

$R_3(\alpha, \beta)$ 表示 A_3A_4 平面上下面两种点之全体:

$$L(\alpha; A_3, A_4)L(\beta; A_3, A_4) \leqslant 0$$

及

$$L(\alpha; A_3, A_4) \leqslant 0,\ L(\beta; A_3, A_4) \leqslant 0,$$
$$\Delta(A_3, A_4) \geqslant 0,\ g(z_1) \leqslant A_3 \leqslant g(z_2).$$

利用这三种符号可以把上述十五种情形具体写下来:

当 z 在 $[z_1, z_2]$ 中变动时,直綫 $L(z; A_3, A_4) = 0$ 在 A_3A_4 平面上扫过之区域如下:

当 $z_1 < z_2 \leqslant -\sqrt{3}$，则为 $R_1(z_1, z_2)$；

当 $z_1 \leqslant -\sqrt{3} \leqslant z_2 \leqslant -1$，则为 $R_1(z_1, -\sqrt{3})$及$R_2(-\sqrt{3}, z_2)$之总和；

当 $z_1 \leqslant -\sqrt{3} < -1 \leqslant z_2 \leqslant 1$，则为 $R_1(z_1, -\sqrt{3})$，$R_2(-\sqrt{3}, -1)$及 $R_3(-1, z_2)$之总和；

当 $z_1 \leqslant -\sqrt{3} < -1 < 1 \leqslant z_2 \leqslant \sqrt{3}$，则为 $R_1(z_1, -\sqrt{3})$，$R_2(-\sqrt{3}, -1)$，$R_3(-1, 1)$及 $R_2(1, z_2)$之总和；

当 $z_1 \leqslant -\sqrt{3} < -1 < 1 < \sqrt{3} \leqslant z_2$，则为 $R_1(z_1, -\sqrt{3})$，$R_2(-\sqrt{3}, -1)$，$R_3(-1, 1)$，$R_2(1, 3)$及 $R_1(3, z_2)$之总和；

当 $-\sqrt{3} \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant -1$，则为 $R_2(z_1, z_2)$；

当 $-\sqrt{3} \leqslant z_1 \leqslant -1 \leqslant z_2 \leqslant 1$，则为 $R_2(z_1, -1)$及 $R_3(-1, z_2)$之总和；

当 $-\sqrt{3} \leqslant z_1 \leqslant -1 < 1 \leqslant z_2 \leqslant \sqrt{3}$，则为 $R_1(z_1, -1)$，$R_3(-1, 1)$及 $R_2(1, z_2)$之总和；

当 $-\sqrt{3} \leqslant z_1 \leqslant -1 < 1 < \sqrt{3} \leqslant z_2$，则为 $R_2(z_1, -1)$，$R_3(-1, 1)$，$R_2(1, \sqrt{3})$及 $R_2(\sqrt{3}, z_2)$之总和；

当 $-1 \leqslant z_1 < z_2 \leqslant 1$，则为 $R_3(z_1, z_2)$；

当 $-1 \leqslant z_1 \leqslant 1 \leqslant z_2 \leqslant \sqrt{3}$，则为 $R_3(z_1, 1)$及 $R_2(1, z_2)$之总和；

当 $-1 \leqslant z_1 \leqslant 1 < \sqrt{3} \leqslant z_2$，则为 $R_3(z_1, 1)$，$R_2(1, \sqrt{3})$及 $R_1(\sqrt{3}, z_2)$之总和；

当 $1 \leqslant z_1 < z_2 \leqslant \sqrt{3}$，则为 $R_2(z_1, z_2)$；

当 $1 \leqslant z_1 \leqslant \sqrt{3} \leqslant z_2$，则为 $R_2(z_1, \sqrt{3})$及 $R_1(\sqrt{3}, z_2)$之总和；

当 $\sqrt{3} \leqslant z_1 < z_2$，则为 $R_1(z_1, z_2)$.

上面十五种的规律是很强的，即将$[z_1, z_2]$用$\pm\sqrt{3}$，± 1四点分为若干段，在下面五段

$$z \leqslant -\sqrt{3},\quad -\sqrt{3} \leqslant z \leqslant -1,\quad -1 \leqslant z \leqslant 1,$$
$$1 \leqslant z \leqslant \sqrt{3},\quad z \geqslant \sqrt{3}$$

中分别用 $\bar{R}_1, R_2, R_3, \bar{R}_2, \bar{R}_1$ 区域即可．为此，我們以后便可算簡化为記号

$$R(z_1, z_2).$$

它表示上述十五种情形之一种，具体表示那一种則依 $[z_1, z_2]$ 与 $\pm\sqrt{3}$，± 1 四点之关系而定．

总結得到下面之定理．

引理 2. 四次方程

$$f(x) \equiv a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0, \ (a_0 \neq 0)$$

在 $|x| \leqslant 1$ 中无实根之充要条件是下面三种情形之一成立：

記

$$C_2 = \left(\frac{a_2}{a_0}\right) - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2,$$

$$C_3 = 2\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 - 3\left(\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\frac{a_2}{a_0}\right) + \left(\frac{a_3}{a_0}\right),$$

$$C_4 = -3\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^4 + 6\left(\frac{a_2}{a_0}\right)\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 4\left(\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\frac{a_3}{a_0}\right) + \left(\frac{a_4}{a_0}\right).$$

(甲) $C_2 > 0$．記

$$A_3 = C_3|(C_2)^{-3/2}|, \quad A_4 = C_4(C_2)^{-2},$$

$$z_1 = \frac{\frac{a_1}{a_0} - 1}{\sqrt{C_2}}, \quad z_2 = \frac{\frac{a_1}{a_0} + 1}{\sqrt{C_2}},$$

$$l(z) \equiv -z^3 - 3z,$$

$$L(z; A_3, A_4) \equiv z^4 + 6z^2 + 4A_3z + A_4,$$

$$\Delta \equiv (A_4 + 3)^3 - 27(A_4 - 1 - A_3^2)^2.$$

則要求 A_3, A_4 滿足下列三組条件之一：

(甲)$_1$ $\qquad L(z_1; A_3, A_4) < 0$, $L(z_2; A_3, A_4) < 0$;

(甲)$_2$ $\qquad$ 当 $A_3 \geqslant l(z_2)$, $L(z_2; A_3, A_4) > 0$;

当 $l(z_1) \leqslant A_3 \leqslant l(z_2)$, $\Delta(A_3, A_4) > 0$;

当 $A_3 \leqslant l(z_1)$, $L(z_1; A_3, A_4) > 0$.

(甲)$_3$ $\qquad A_3 = 0$, $A_4 = 9$.

下面是第二种情形.

(乙) $C_2 = 0$. 記

$$A_3 = C_3, \quad A_4 = C_4,$$

$$z_1 = \frac{a_1}{a_0} - 1,\ z_2 = \frac{a_1}{a_0} + 1,$$

$$l(z) = -z^3,\ L(z;\ A_3,\ A_4) \equiv z^4 + 4zA_3 + A_4,$$

$$\Delta \equiv A_4^3 - 27A_3^4.$$

则要求 A_3, A_4 满足下列两組条件之一:

(乙)$_1$ $\qquad L(z_1;\ A_3,\ A_4) < 0,\ L(z_2;\ A_3,\ A_4) < 0;$

(乙)$_2$

当 $A_3 \geqslant l(z_2)$, $L(z_2;\ A_3,\ A_4) > 0$;

当 $l(z_1) \leqslant A_3 \leqslant l(z_2)$, $\Delta(A_3,\ A_4) > 0$;

当 $A_3 \leqslant l(z_1)$, $L(z_1;\ A_3,\ A_4) > 0$.

下面是第三种情形.

(丙) $C_2 < 0$. 記

$$A_3 = C_3|(|C_2|)|^{-3/2},\ A_4 = C_4(|C_2|)^{-2},$$

$$z_1 = \frac{\frac{a_1}{a_0} - 1}{\sqrt{|C_2|}},\ z_2 = \frac{\frac{a_1}{a_0} + 1}{\sqrt{|C_2|}},$$

$$g(z) \equiv -z^3 + 3z,$$

$$L(z;A_3,\ A_4) \equiv z^4 - 6z^2 + 4A_3z + A_4,$$

$$\Delta \equiv (A_4 + 3)^3 - 27(-A_4 + 1 - A_3^2)^2,$$

$$R_1(\alpha,\beta),\ R_2(\alpha,\beta),\ R_3(\alpha,\beta),\ R_4(\alpha,\beta)$$

如上面的定义.

则要求$(A_3,\ A_4)$不在 $R(z_1,\ z_2)$ 中,亦即要求$(A_3,\ A_4)$在 A_3A_4 平面上$R(z_1, z_2)$之补集中. 用$\bar{R}(z_1,\ z_2)$記此补集,则要求(A_3, A_4)属于这个补集.

注意到 $R(z_1,\ z_2)$ 是若干个 $R_i(\alpha,\ \beta)$ 之和, 以 $\bar{R}_i(\alpha,\ \beta)$ 記这些 $R_i(\alpha, \beta)$ 之补集,则由

$$R = \bigcup R_i,$$

有

$$\bar{R} = \bigcap \bar{R}_i.$$

因此,要求(A_3, A_4)在 $\bar{R}$ 中,即要求(A_3, A_4)在 $\bar{R}_i$ 之交集中,故要(A_3, A_4)同时满足这些 $\bar{R}_i$ 之条件,则为充分而且必要.

上述情形虽然复杂,但是都只用到系数的加减乘除乘方开方,因此是代数判定. 这里不只判定实根之有无,而且由(A_3, A_4)知道它的个数.

$n = 2$ 时(1.1)为无条件稳定之充要条件.

现在研究系统

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+b_1y(t)+b_2y(t-\tau), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= c_1x(t)+c_2x(t-\tau)+d_1y(t)+d_2y(t-\tau). \end{aligned}\right\} \quad (1.10)$$

特征方程为

$$\Delta(\lambda;\tau) \equiv \begin{vmatrix} a_1 + a_2e^{-\lambda\tau} - \lambda & b_1 + b_2e^{-\lambda\tau} \\ c_1 + c_2e^{-\lambda\tau} & d_1 + d_2e^{-\lambda\tau} - \lambda \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv A_1 + A_2e^{-\lambda\tau} + A_3e^{-2\lambda\tau} + A_4\lambda + A_5\lambda e^{-\lambda\tau} + \lambda^2 = 0,$$

此地

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \left[\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} \right],$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad A_4 = -a_1 - d_1, \quad A_5 = -a_2 - d_2.$$

用 $\lambda = iy$, $-\lambda\tau = i\omega$ 代入 $\Delta(\lambda, \tau)$, 则有

$$D(y,\omega) \equiv \begin{vmatrix} a_1 + a_2e^{i\omega} - iy & b_1 + b_2e^{i\omega} \\ c_1 + c_2e^{i\omega} & d_1 + d_2e^{i\omega} - iy \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv U(y,\omega) + iV(y,\omega),$$

此地

$$U(y, \omega) \equiv [A_1 + A_2\cos\omega + A_3\cos 2\omega] + [-A_5\sin\omega]y - y^2,$$

$$V(y, \omega) \equiv [A_2\sin\omega + A_3\sin 2\omega] + [A_4 + A_5\cos\omega]y.$$

由定理 1 知(1.10)为无条件稳定之充要条件是

(i) $\Delta(\lambda; 0) \equiv (A_1 + A_2 - A_3) + (A_4 + A_5)\lambda + \lambda^2 = 0$

之 λ 有负实部,亦即

$$A_1+A_2+A_3>0,\ A_4+A_5>0.$$

(ii)′ 对任何实的 $\tau>0$ ($\tau=0$ 已在 (i) 中考虑过)及任何实的 y 均有

$$\Delta(iy,\tau)\equiv|a_{sj}+b_{sj}e^{-iy\tau}-\delta_{sj}(iy)|\neq 0.$$

注意到(ii)中当 $y=0$ 时,由(i)有

$$\Delta(0,\tau)\equiv|a_{sj}+b_{sj}|\equiv A_1+A_2+A_3>0,$$

故知(1.10)为无条件稳定之充要条件是

$$A_1+A_2+A_3>0,\ A_4+A_5>0,$$

(ii)″ 对任何实的 $\tau>0$ 及任何实的 $y\neq 0$, 均有

$$\Delta(iy,\tau)\equiv|a_{sj}+b_{sj}e^{-iy\tau}-\delta_{sj}(iy)|\neq 0.$$

注意 a_{sj}, b_{sj}, δ_{sj} 都是实的,因此

$$\Delta(iy,\tau)=0$$

中之 y 如有正实根,必有负实根. 因共轭根成对, 这样对 $\tau>0$, $y\neq 0$, $-\tau y$ 便可正可负,只是不为 0 ,亦即 $\omega=-\tau y$ 可正可负,只是不为 0 . 由此即得(1.10)为无条件稳定之充要条件是

(I) $\qquad A_1+A_2+A_3>0,\ A_4+A_5>0;$

(II) 对任何实的 $\omega\neq 0$ 及任何实的 $y\neq 0$ 均有 $D(y,\omega)\neq 0$, 即有

$$[U(y,\omega)]^2+[V(y,\omega)]^2\neq 0.$$

现在由联立方程

$$U(y,\omega)\equiv[A_1+A_2\cos\omega+A_3\cos 2\omega]+ \\ +[-A_5\sin\omega]y-y^2=0$$

及

$$V(y,\omega)\equiv[A_2\sin\omega+A_3\sin 2\omega]+ \\ +[A_4+A_5\cos\omega]y=0$$

消去 y, 即由 $V=0$ 解出 y 代入 $U=0$, 则得方程

$$[A_1+A_2\cos\omega+A_3\cos 2\omega]+[-A_5\sin\omega]\times \\ \times\frac{-A_2\sin\omega-A_3\sin 2\omega}{A_4+A_5\cos\omega}-\sin^2\omega\left[-\frac{A_2+2A_3\cos\omega}{A_4+A_5\cos\omega}\right]^2=0.$$

用$[A_4+A_5\cos\omega]^2$乘全式，并利用三角公式 $\cos 2\omega=2\cos^2\omega-1$，$\sin 2\omega=2\sin\omega\cos\omega$，$\sin^2\omega=1-\cos^2\omega$，則全部化为 $\cos\omega$ 之四次方程如下：

$$H(\cos\omega)\equiv a_0\cos^4\omega+4a_1\cos^3\omega+6a_2\cos^2\omega+$$
$$+4a_3\cos\omega+a_4=0,$$

此地

$$a_0=2A_3A_5^2+4A_3^2-2A_2A_3A_4,$$

$$a_1=A_3A_4A_5+A_2A_3-\frac{1}{2}A_2A_3A_4,$$

$$a_2=\frac{1}{3}A_3A_4^2+\frac{1}{3}A_2A_4A_5+\frac{1}{6}A_1A_5^2-\frac{1}{6}A_3A_5^2,$$

$$a_3=\frac{1}{4}A_2A_4^2+\frac{1}{2}A_1A_4A_5-\frac{1}{2}A_3A_4A_5+\frac{1}{4}A_2A_5^2+$$
$$+\frac{1}{4}A_2A_3A_4-\frac{1}{4}A_2A_3,$$

$$a_4=A_1A_4^2-A_3A_4^2+A_2A_4A_5-A_2^2.$$

利用定理 4 可以判定这个方程有几个实根在 $|\cos\omega|\leqslant 1$ 中，亦即判定 $H(\cos\omega)=0$ 有几个实的 ω.

下面分两种情形研究：

$(\mathrm{II})_1$ $H(\cos\omega)=0$ 无实根 ω，这时对任何实的 ω 及实的 y 均有

$$[U(y,\omega)]^2+[V(y,\omega)]^2\neq 0,$$

故得到无条件稳定.

$(\mathrm{II})_2$ $H(\cos\omega)=0$ 有实根 ω.

这时又可分两种情形：

$(\mathrm{II})_{21}$ $H(\cos\omega)=0$ 有某一实根 ω_0 使

$$A_4+A_5\cos\omega_0\neq 0,$$
$$A_2\sin\omega_0+A_3\sin 2\omega_0\neq 0.$$

这时可由 $V=0$ 解出

$$y_0=-\frac{A_2\sin\omega_0+A_3\sin 2\omega_0}{A_4+A_5\cos\omega_0},$$

并且 $y_0 \neq 0$. 又将 y_0 及 ω_0 代入 $U(y, \omega)$, 则有

$$[A_4 + A_5\cos\omega_0]^2 U(y_0, \omega_0) = H(y_0, \omega_0) = 0.$$

故

$$U(y_0, \omega_0) = 0.$$

由此知有实的 ω_0 及 $y_0(\neq 0)$ 使得

$$V(y_0, \omega_0) = U(y_0, \omega_0) = 0.$$

由此知不是无条件稳定.

$(\mathrm{II})_{22}$ $H(\cos\omega_0) = 0$ 之实根 ω_0 均满足

$$(A_4 + A_5\cos\omega_0)\sin\omega_0(A_2 + 2A_3\cos\omega_0) = 0.$$

以下分两种情形研究:

$(\mathrm{II})_{221}$ $H(\cos\omega_0) = 0$ 之所有实根 ω_0 均使

$$A_4 + A_5\cos\omega_0 \neq 0,$$

则自 $V = 0$ 解出唯一之 $y = 0$. 故得无条件稳定.

$(\mathrm{II})_{222}$ $H(\cos\omega_0) = 0$ 有实根 ω_0 使

$$A_4 + A_5\cos\omega_0 = 0,$$

则由于此时

$$H(\cos\omega_0) = -\sin^2\omega_0[A_2 + 2A_3\cos\omega_0]^2,$$

故必有

$$\sin\omega_0[A_2 + 2A_3\cos\omega_0] = 0.$$

这时 $V(y, \omega_0) \equiv 0$ 对所有 y 成立,故要由 U 来解决. 以下分两种情形研究:

$(\mathrm{II})_{2221}$ $\quad \sin\omega_0 = 0;$

$(\mathrm{II})_{2222}$ $\quad \sin\omega_0 \neq 0, \ A_2 + 2A_3\cos\omega_0 = 0.$

分别研究之:

$(\mathrm{II})_{2221}$ $\quad \sin\omega_0 = 0,$

故 $\omega_0 = 0, \pi$. 但 $\omega_0 = 0$, 则 $\cos\omega_0 = 1$. 而由(I)有

$$H(1) = (A_1 + A_2 + A_3)(A_4 + A_5)^2 > 0.$$

故

$$\omega_0 \neq 0, \ 即 \ \omega_0 = \pi, \ \cos\omega_0 = -1.$$

这时

$$U(y, \pi) \equiv A_1 - A_2 + A_3 - y^2 = 0$$
中之 y 或不是实的，或为实的，但为零之充要条件是

$$A_1 - A_2 + A_3 \leqslant 0.$$

(II)$_{mn}$ $\quad\quad \sin\omega_0 \neq 0,\ \omega_0 \neq 0, \pi.$

$$A_2 + 2A_3\cos\omega_0 = 0.$$

（由 $A_4 + A_5\cos\omega_0 = 0$ 知 $A_5 \neq 0$，否則 $A_4 = 0$，这与 $A_4 + A_5 > 0$ 矛盾）

$$U(y, \omega_0) \equiv A_1 - A_3 - A_5\sin\omega_0 y - y^2 = 0$$
中之 y 或非实，或为实但是零，即要求

$$(A_5^2 - A_4^2) + 4(A_1 - A_3) = A_5^2\sin^2\omega_0 + 4(A_1 - A_3) < 0$$

或

$$A_5\sin\omega_0 = 0,\ A_1 - A_3 = 0.$$

但后者 $A_5\sin\omega_0 \neq 0$ 不出現．由此只有

$$A_5^2 - A_4^2 + 4(A_1 - A_3) < 0.$$

現將結果总結如下：

如果 $A_1 + A_2 + A_3 \leqslant 0$ 或 $A_4 + A_5 \leqslant 0$，則(10)不是无条件稳定．因此以下設

$$A_1 + A_2 + A_3 > 0,\ A_4 + A_5 > 0.$$

定义

$$\begin{aligned} H(\cos\omega) \equiv\ & [A_1 + A_2\cos\omega + A_3\cos 2\omega][A_4 + A_5\cos\omega]^2 + \\ & + A_5[A_2 + 2A_3\cos\omega][A_4 + A_5\cos\omega][1 - \cos^2\omega] - \\ & - [A_2 + 2A_3\cos\omega]^2[1 - \cos^2\omega]. \end{aligned}$$

如果 $H(\cos\omega) = 0$ 无实根 ω，則(10)为无条件稳定．

以下設 $H(\cos\omega) = 0$ 有实根 ω．如果 $H(\cos\omega) = 0$ 之实根 ω 中有 ω_0 使

$$[1 - \cos^2\omega_0][A_2 + 2A_3\cos\omega_0][A_4 + A_5\cos\omega_0] \neq 0,$$

則(10)不是无条件稳定．

以下設 $H(\cos\omega) = 0$ 之所有实根 ω 均使

$$[1 - \cos^2\omega][A_2 + 2A_3\cos\omega][A_4 + A_5\cos\omega] = 0.$$

如果 $H(\cos\omega) = 0$ 之所有实根 ω 均使

$$A_4 + A_5\cos\omega \neq 0,$$

則(10)为无条件稳定.

以下設 $H(\cos\omega) = 0$ 有实根 ω_0 使

$$A_4 + A_5\cos\omega_0 = 0.$$

如果 $\cos\omega_0 = -1$, 則无条件稳定性之充要条件是

$$A_1 - A_2 + A_3 \leqslant 0.$$

以下設 $\cos\omega_0 \neq -1$, 則无条件稳定性之充要条件是

$$A_5^2 - A_4^2 + 4(A_1 - A_3) < 0.$$

若干注意之点

注意 I. 安德洛諾夫 (Андронов)[22] 在 1946 年提出了 $n = 2$ 的問題. 这个問題对于无条件稳定而言,已如 §4 所解决.

注意 II. 这里的方法可以用到一般 n, 也可用到时滞 τ 不是同一个的問題. 这些都是一系列的代数問題, 而不必研究超越方程.

注意 III. 可以推得若干充分条件,例如

$$A_1 + A_2 + A_3 > 0,\ A_4 + A_5 > 0.$$

$H(x) = 0$ 无实根 x, 則(1.10)为无条件稳定. 或者也可减弱到 $H(x) = 0$ 在 $|x| \leqslant 1$ 中沒有实根,也得到(1.10)之无条件稳定性.

第七章　其他若干有关問題

利用第一章中提出的两类方法，可以用来研究具有大时滞的系統、具有时滞的中立型系統及具有时滞的周期系数的系統的运动穩定性問題．我們在这里仅叙述这些系統的一部分結果．

并且指出，利用这些方法还可以研究其他类型的系統的运动穩定性問題．

§1. 大时滞問題[23]

考虑一般的綫性常系数系統

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1.1}$$

与具有时滞的綫性系統

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j(t)+b_{ij}x_j(t-\tau_{ij}))\tag{1.2}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

在穩定性問題上的等价关系，其特征方程分別为

$$D(\lambda,1)=|a_{ij}-\delta_{ij}\lambda|=0\tag{1.3}$$

及

$$D(\lambda,e^{-\lambda\tau_{ij}})=|a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau_{ij}}-\delta_{ij}\lambda|=0.\tag{1.4}$$

引理 1. (i) 若方程(1.3)之所有特征根都具有負实部．

(ii) $D(iy,e^{-\tau_{ij}iy})\neq 0$，当 $|y|\leqslant k>0$，$\tau_{ij}>0$ 时．

(iii) 在单位圓內 $D(0,W_i)=0$ 无根，

則存在 $\Delta>0$，使当 $0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\Delta$ 时 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，方程(1.4)所有特征根亦都具有負实部．

証．将方程(1.4)写成下面形式：

$$D(\lambda,e^{-\lambda\tau_{ij}})=\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\cdots+A_{n-1}\lambda+A_n=0.$$

系数 A_j 是 $e^{-\tau_{ij}\lambda}$, a_{ij} 及 $b_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 的多项式.

$$\tau_{ij} \geqslant 0, \ \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0 \text{ 时}, \ |e^{-\tau_{ij}\lambda}| \leqslant 1.$$

令

$$A = \max[|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_n|, 1].$$

当

$$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 1 + A > 0 \text{ 时}$$

$$D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$$

无根. 由

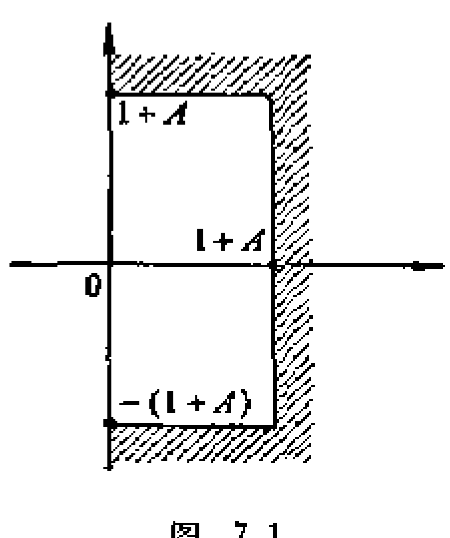


图 7.1

$$|\lambda|^{n-1} + |\lambda|^{n-2} + \cdots + |\lambda| + 1 = \frac{|\lambda|[|\lambda|^{n-1} - 1]}{|\lambda| - 1} < $$

$$< \frac{|\lambda|^n}{|\lambda| - 1},$$

$$|D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})| \geqslant |\lambda|^n - |A|[|\lambda|^{n-1} + \cdots + |\lambda| + 1] >$$

$$> \frac{|\lambda|^n}{|\lambda| - 1}[|\lambda| - 1 - A] \geqslant 0.$$

同理, 当 $0 \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 1 + A$, $|\mathrm{Im}(\lambda)| \geqslant 1 + A$ 时, $D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 也无根.

现在考虑矩形 R:

$$0 \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 1 + A, |\mathrm{Im}(\lambda)| \leqslant 1 + A$$

中的情形.

反証, 在 R 中若有 $D(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) = 0$ 之根, $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$. 由所給的条件(i)在 $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ 上不存在根, 故只有在 R 内部.

令 $\tau = \min\limits_{i,j=1,2,\cdots,n} (\tau_{ij})$, 只要考虑 τ 的情形即可. 当 $\tau \to \infty$ 时, 至少有一个极限点 $\lambda \to \lambda_\infty$. $R(\lambda_\infty)$ 不能大于零, 否则当 $\tau \to \infty$ 时, $e^{-\tau\lambda} \to e^{-\tau\lambda_\infty} \to 0$, 这与方程(1.3)在 R 内无正实部之根是矛盾的. 且 $R(\lambda_\infty) \neq 0$, 否則有 $\lambda_k \to \lambda_\infty = iy_\infty$. 設 $y_\infty \neq 0$, 不妨設 $y_\infty > 0$.

$$\tau_k y_k = 2\pi m_k + u_k, \quad 0 \leqslant u_k \leqslant 2\pi,$$

故至少有一个 $\{u_{k_e}\}\to u_e$. 取 $\tau=\frac{u_e}{y_\infty}$, 则有

$$D(iy_k,\ e^{-i\tau_k y_k})=0.$$

由此得到

$$D(iy_k,\ e^{-iu_k})=0\to D(iy_{k_e},\ e^{-iu_{k_e}})=0$$
$$\to D(iy_\infty,\ e^{-iu_e})=0,$$

即

$$D(iy_\infty,\ e^{-i\tau y_\infty})=0.$$

这与假定在虚轴上无根有矛盾.

如果 $\lambda_n\to 0$, 则 $\tau_k y_k=2\pi m_k+u_k\ (0\leqslant u_k\leqslant 2\pi)$, $u_{k_e}\to u_e$, 于是

$$D(\lambda_n,\ e^{-\tau_n\lambda_n})=0\to D(\lambda_n,\ e^{-\tau_n x_n}e^{iu_k})=0.$$

如果 $\tau_n x_n$ 无界,可取 $\tau_{n_e}x_{n_e}\to+\infty$, 则

$$D(\lambda_{n_e},\ e^{-\tau_{n_e}x_{n_e}}e^{+iu_e})=0,$$

得到

$$D(0,\ 0)=0.$$

这与(1.3)之所有根具有負实部是矛盾的.

如果 $\tau_n x_n$ 有界,则有极限:

$$\tau_{n_e}x_{n_e}\to\mu_\infty\geqslant 0.$$

此时

$$D(\lambda_{n_e},\ e^{-\tau_{n_e}x_{n_e}}e^{iu_{k_e}})=0,$$

得到

$$D(0,\ e^{-\mu_\infty}e^{iu_e})=0.$$

这与 $D(0,W_i)=0$, $|W_i|\leqslant 1$ 中无根之假定矛盾.

引理 1 証毕.

由引理 1 及伯尔曼定理立即得到下面的定理.

定理 1. 在引理 1 的条件下,存在 $\Delta>0$,使当

$$\tau_{ij}>\Delta\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

时,方程組(1.2)之零解是漸近穩定的.

引理 2. 若 (1.3) 至少有一个具正实部之根,則存在 $\Delta>0$, 使当

$$\tau_{ij} > \Delta \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

时，方程(1.4)亦至少有一个具正实部之根．

证． 由假定方程(1.3)至少有一个具正实部之根，令为 λ_0．$R(\lambda_0) > 0$，分二种情形作圆 c．

a) 若除 λ_0 外，$D(\lambda, 1) = 0$ 再无其他具正实部之根，取

$$r_0 = \min\left[\frac{R(\lambda_0)}{n}, \frac{|\mathrm{Im}(\lambda_0)|}{n}\right]$$

为半径、λ_0 为圆心做圆 c，n 为大于1的正整数，取 n 使在圆 c 上无 $D(\lambda_1, e^{-\tau_{ij}\lambda}) = 0$ 之根．

b) 若除 λ_0 外，尚有 $D(\lambda, 1) = 0$ 之具正实部之根 λ_i．$R(\lambda_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$，不妨令

$$R(\lambda_0) > R(\lambda_1) > \cdots > R(\lambda_k) > 0.$$

否则只要重新再排列一下符号即可．

取

$$r_0 = \min\left[\frac{R(\lambda_0) - R(\lambda_1)}{n}, \frac{|\mathrm{Im}(\lambda_0) - \mathrm{Im}(\lambda_1)|}{n}\right].$$

以 r_0 为半径、λ_0 为心做圆 C．n 亦有如 a) 中所要求之性质．

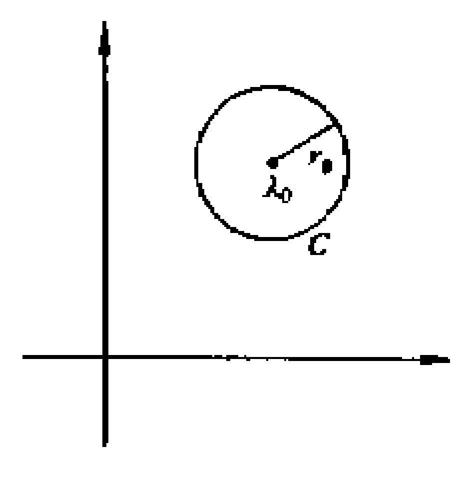


图 7.2

令

$$m = \min_{\lambda \in C\text{之边界}} |D(\lambda, 1)|.$$

由于

$$R(\lambda_0) > 0, \text{ 取 } \tau = \min_{i,j=1,2,\cdots,n} (\tau_{ij}).$$

由(1.4) $D(\lambda, e^{-\tau_{ij}\lambda}) = D(\lambda, 1) + H(\lambda, e^{-\tau_{ij}\lambda})$

$$|H(\lambda, e^{-\tau_{ij}\lambda})| \leqslant K_1 e^{-\tau(R(\lambda_0) - r_0)},$$

其中 K_1 为一正数．

$$\ln\frac{m}{K_1} < -\tau(R(\lambda_0) - r_0)$$

所以

$$\tau > \frac{1}{R(\lambda_0) - r_0}\left[-\ln\frac{m}{K_1}\right] \text{时}$$

$$m = \min_{\lambda \in C\text{之边界}} |D(\lambda, 1)| > \max_{\lambda \in C\text{之边界}} |H(\lambda, e^{-\tau_{ij}\lambda})|$$

成立.

由儒歇定理知 $D(\lambda, 1) = 0$ 与 $D(\lambda, e^{-\tau_{ij}\lambda}) = 0$ 在圆 C 中根的个数相同. 而 $D(\lambda, 1) = 0$ 在圆 C 中只有一个具正实部之根, 故 $D(\lambda, e^{-\tau_{ij}\lambda}) = 0$ 在圆 C 中亦有一个具正实部之根.

引理 2 証毕.

定理 2. 若引理 2 之条件成立,則存在 $\Delta > 0$, 使当

$$\tau_{ij} > \Delta \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

时,方程組(1.2)之零解不稳定.

对 $n = 1$ 及一般情形之非綫性情形可类似于第四章中之情形. 此处从略.

这里給出了两个例子, 說明在稳定性問題上对第一临界情形及第二临界情形都不存在等价关系.

例 1. 考虑方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \tag{1.5}$$

及带有时滞的方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau), \tag{1.6}$$

其特征方程分别为

$$D(\lambda, 1) = \lambda - a = 0 \tag{1.7}$$

及

$$D(\lambda, e^{-\tau\lambda}) = \lambda - a - be^{-\tau\lambda} = 0. \tag{1.8}$$

$a = 0$ 時, 由(1.7)知为第一临界情形,此时方程(1.5)之零解是稳定的. 若取 $b > 0$, 則对任何 $\tau \geqslant 0$(1.6)之零解是不稳定的. 这是因为对任何 $\tau \geqslant 0$, (1.8)至少有一个正实部之根. 因此, 在第一临界情形下,在稳定性上不存在等价关系.

例 2. 考虑方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t - \tau) + x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t - \tau), \end{cases} \tag{1.9}$$

其特征方程为

$$D(\lambda, e^{-\tau\lambda}) = \begin{vmatrix} e^{-\lambda\tau} - \lambda & 1 \\ -1 & e^{-\lambda\tau} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.10)$$

或

$$D(\lambda, e^{-\tau\lambda}) = (e^{-\lambda\tau} - \lambda)^2 + 1 = 0,$$

即

$$\lambda = e^{-\lambda\tau} \pm i. \qquad (1.11)$$

由 $D(\lambda,1) = 1 + \lambda^2 = 0$，知 $\lambda = \pm i$ 为第二临界情形，此时对应之微分方程之零解是稳定的.

可証 (1.11) 对任何 $\tau \geqslant \Delta \geqslant 0$，总存在无穷多个具正实部之根，即得到在第二临界情形下，在稳定性間題上不存在等价关系.

考虑 $\lambda = e^{-\lambda\tau} + i$ 具正实部根之情形. 先考虑辅助方程

$$\lambda = e^{-\lambda\tau}.$$

具正实根之情形，其中 $\tau \geqslant 0$.

令

$$F(\lambda, \tau) = \lambda - e^{-\lambda\tau}.$$

由 $F(0, \tau) = -1 < 0$，$F(\infty, \tau) = +\infty > 0$，知在 $(0,\infty)$ 之間 $F(\lambda, \tau) = 0$ 至少有一个正实根对任意的 $\tau \geqslant 0$ 成立. 設此正实根為 λ_0.

今考虑方程

$$\lambda = e^{-\lambda\tau} + i.$$

令 $\lambda = \lambda_0 + iy$，代入上方程中，就有

$$\lambda_0 + iy = e^{-(\lambda_0+iy)\tau} + i$$

从而得到

$$\begin{cases} \lambda_0 = e^{-\tau\lambda_0}\cos\tau y, \\ y = -e^{-\tau\lambda_0}\sin\tau y + 1. \end{cases} \qquad (1.12)$$

取 $\tau y = 2k\pi (k = 0, 1, 2, \cdots)$. 为了满足 (1.12) 中第二个方程，取 $y = 1$，即 $\tau = 2k\pi$，亦即 $\lambda = \lambda_0 + i$ 在 τ 取 $0, 2\pi, 4\pi, \cdots, 2k\pi, \cdots$ 时为

$$\lambda = e^{-\tau\lambda} + i$$

之根。

同理可証，对方程

$$\lambda = e^{-\lambda\tau} - i$$

也得到相同之結論，只要 y 取 -1 卽可；卽 $\lambda = \lambda_0 - i$ 满足此方程。

因此，得到对任意的 τ，只要 $\tau \geqslant \Delta \geqslant 0$ 时，总可以取到其特征方程具有无穷多个实部为正数的根。故对方程(1.9)之零解是不稳定的。

§2. 中立型問題[24]

考虑常系数的中立型微分差分方程

$$Au'(t+1) + Bu(t+1) + Cu'(t) + Du(t) = 0. \qquad (2.1)$$

初始函数为 $u(t) = \varphi(t)$, $u'(t) = \varphi'(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$，此处 $\varphi(t)$ 及其导数为間隔 $[0,1]$ 上的連續函数，则 $(1)_2'$ 之解当 $t \geqslant 0$ 时存在且唯一[2,3]。

此处 τ_i 的定义为

$$0 < \tau_i < \pi \quad i = 1,2,3,$$

$$\tau_1 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{A+C}{A-C}, \quad \tau_2 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{-(A^2-C^2)(B^2-D^2)}}{(A-C)(B-D)}\right),$$

$$\tau_3 = \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{-(A^2-C^2)(B^2-D^2)}}{(A-C)(B-D)}\right).$$

而 K_i 为

$$K_i = \left[-\frac{\tau_i}{\pi} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\frac{(B-D)}{(A+C)}\mathrm{tg}\,\tau_i\right]^{1)} + 1, i = 1,2,3.$$

定理 3. 假定满足下面条件之一：

(1) $A^2 > C^2$, $B^2 > D^2$, $(A+C)(B+D) > 0$;

(2) 或a) $A^2 > C^2$, $B^2 < D^2$, $(A+C)(B+D) > 0$,

$$K_2 = K_3;$$

---

1) [ ] 表示取整数部分。

或 b) $A^2 > C^2$, $B^2 < D^2$, $(A+C)(B+D) < 0$,

$$-K_2 + K_3 = -1,$$

則方程式(2.1)之平凡解漸近穩定.

證. 方程(2.1)在給定的初始函數下得到的解存在且唯一. 由于初始函數的假定及存在唯一的解，它滿足維尔布伦斯基(S. Verblunsky)[26] 定理的条件，故(2.1)之解可以級數形式表示. 因此，只要証明(2.1)的特征方程的所有根具有負实部，則得到定理的結論.

方程(2.1)的特征方程为

$$Aze^z + Be^z + Cz + D = 0. \tag{2.2}$$

此式左端可以化为

$$(\alpha_1 z + \alpha_0)\,\mathrm{ch}\, z + (\beta_1 z + \beta_0)\,\mathrm{sh}\, z, \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = A + C,\ \beta_1 = A - C,\ \alpha_0 = \frac{B+D}{2},\ \beta_0 = \frac{B-D}{2},\\ &\bar{A} = \alpha_0\alpha_1 = \frac{1}{2}(A+C)(B+D),\ \bar{D} = 0,\\ &\bar{B} = \beta_0\beta_1 = \frac{1}{2}(A-C)(B-D). \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

根据切波他略夫及梅曼(Н. Цеботарев 及 Н. Мейман)[27] 的結果，欲使(2.3)的所有根具有負实部的充要条件是下列之一成立：

$$\begin{aligned} &1)\ \bar{D}^2 - 4\bar{A}\bar{B} < 0,\quad \alpha_1\beta_1 > 0,\ \alpha_0\alpha_1 > 0;\\ &2)\ \bar{D}^2 - 4\bar{A}\bar{B} > 0,\ \text{或 a)}\ \alpha_1\beta_1 > 0,\ \alpha_0\alpha_1 > 0,\\ &\qquad\qquad \bar{K}_2 = \bar{K}_3,\\ &\qquad\qquad \text{或 b)}\ \alpha_1\beta_1 > 0,\ \alpha_0\alpha_1 < 0,\\ &\qquad\qquad -\bar{K}_2 + \bar{K}_3 = -1, \end{aligned} \tag{2.5}$$

此处 $\bar{K}_i (i = 2, 3)$ 为

$$\left[-\frac{\bar{\tau}_i}{\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{\beta_0\,\mathrm{tg}\,\bar{\tau}_i}{\alpha_1}\right] + 1 \tag{2.6}$$

且 $0 < \bar{\tau}_i < \pi$,

$$\bar{\tau}_1 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \bar{\tau}_2 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-\bar{D} + \sqrt{\bar{D}^2 - 4\bar{A}\bar{B}}}{2\bar{B}}\right),$$

$$\bar{\tau}_3 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-\bar{D} - \sqrt{\bar{D}^2 - 4\bar{A}\bar{B}}}{2\bar{B}}\right). \tag{2.7}$$

将(2.4)分别代入(2.6),(2.7),(2.5)中,由于定理1的假定条件知(2.5)成立,故得到方程(2.2)的所有根具有負实部. 定理証毕.

定理 4. 若方程(2.1)滿足条件

$$B + \frac{|D| + |B||C|}{|A| - |C|} \leqslant 0, \tag{2.8}$$

則(2.1)之解

$$|u(t)| \leqslant \frac{K}{|A| - |C|} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varphi(t)| e^{\left(B + \frac{|D| + |B||C|}{|A| - |C|}\right)t} \tag{2.9}$$

$$(t \geqslant 0)$$

成立(此处K为一正的常数).

定理4的証明比較簡单,利用綫性积分公式及伯尔曼不等式就可得到.

現在考虑微分方程与微分差分方程解在穩定問題上的等价性.

将中立型微分差分方程(2.1)記为

$$Au'(t+\tau) + Bu(t+\tau) + Cu'(t) + Du(t) = 0, \tag{2.1}$$

初始函数为$u(t) = \varphi(t)$, $u'(t) = \varphi'(t)(0 \leqslant t \leqslant \tau)$,其中$\tau > 0$. 此处$\varphi(t)$及其导数为在$0 \leqslant t \leqslant \tau$上的連續函数.

定理 5. 假定$(A + C)(B + D) > 0$,而且$A^2 - C^2 > 0$, $B^2 - D^2 > 0$,則对任意$\tau > 0$,方程(2.7)之平凡解为漸近穩定.

証. 由定理3知,只要驗証滿足(2.7)之特征方程的一切根具有負实部的条件.

方程式(2.7)之特征方程为

$$Aze^{\tau z} + Be^{\tau z} + Cz + D = 0.$$

令$\tau z = z_1$,則化为

$$Az_1e^{z_1} + B\delta e^{z_1} + Cz_1 + D\tau = 0.$$

由于定理1中(1)的条件滿足于对应的特征方程一切根具有負实部的結論,此处(2.7)之特征方程之系数滿足于定理1中(1)的条

件,故由定理 1 知(2.7)之平凡解对任意 $\tau > 0$, 渐近稳定.

定理 6. 假定 $(A+C)(B+D)>0$, 而且 $A^2-C^2>0$, $B^2-D^2<0$, 必存在 $\Delta(A,B,C,D)>0$, 使 $0<\tau<\Delta(A,B,C,D)$ 时,方程(2.7)之平凡解渐近稳定.

証. 方程(2.7)之特征方程为

$$Aze^z + B\delta e^z + Cz + D\tau = 0.$$

令 $A_1=A$, $B_1=B\tau$, $C_1=C$, $D_1=D\tau$, 驗証满足定理 1 中(2)之几个不等式:

$$(A_1+C_1)(B_1+D_1)=\tau(A+C)(B+D)>0,$$

$$A_1^2-C_1^2=A^2-C^2>0,\ B_1^2-D_1^2=\tau^2(B^2-D^2)<0.$$

$\Delta(A,B,C,D)$ 的选取由 $K_2=K_3$, 即

$$\left[-\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{-(A^2-C^2)(B^2-D^2)}}{(A-C)(B-D)}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\frac{\tau}{(A^2-C^2)}\sqrt{(A^2-C^2)(D^2-B^2)}\right]=$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{(A^2-C^2)(D^2-B^2)}}{(A-C)(B-D)}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\frac{\tau}{(A^2-C^2)}\sqrt{(A^2-C^2)(D^2-B^2)}\right],$$

得到

$$\left|\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{(A^2-C^2)(D^2-B^2)}}{(A-C)(B-D)}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\frac{\tau}{(A^2-C^2)}\sqrt{(A^2-C^2)(D^2-B^2)}\right|<1.$$

故当

$$\tau<\left(\pi-2\left|\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{(A^2-C^2)(D^2-B^2)}}{(A-C)(B-D)}\right|\right)\sqrt{\frac{(A^2-C^2)}{D^2-B^2}}=$$
$$=\Delta(A,B,C,D)$$

时, $K_2=K_3$ 满足,所以由定理 1 中(2)知,(2.7)之平凡解渐近稳定.

定理 7. 假定 $A+C>0$, $B+D<0$, $A>0$(或者 $A+$ $+C<0$, $B+D>0$, 其中 $A<0$), 則 (2.7) 之平凡解对任何 $\tau>0$ 为不稳定.

証. 令

$$H(\tau, z) = Aze^{\tau z} + Be^{\tau z} + Cz + D.$$

由于

$$H(\tau, 0) = B + D < 0,$$

$$H(\tau, +\infty) = +\infty > 0,$$

故在$(0, +\infty)$間至少存在一个正实根 $z_0(\tau)>0$, 滿足于

$$H(\tau, z_0) = 0.$$

方程 (2.7) 有解为 $C_0e^{z_0(\tau)t}$, 故 (2.7) 之平凡解对任意 $\tau>0$ 不稳定.

§3. 周期系数問題

利用第一章中提出的方法, 可以研究具周期系数的方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(t) + b_{ij}(t))x_j(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.1}$$

与具有时滞的周期系数方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(\pi)x_j(t) + b_{ij}(t)x_j(t-\tau_{ij})) \tag{3.2}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

在稳定性問題上的等价性,此处系数 $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 都是 t 的有界連續周期函数.

定理 1. 設方程(3.1)之示性根之模数都小于 1, 即(3.1)之零解是漸近稳定的,則存在 $\Delta>0$, 使当

$$0 \leqslant \tau_{ij} \leqslant \Delta \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

时,具有时滞的方程組(3.2)之零解也是漸近稳定的.

証. 对具周期系数的方程組 (3.1), 一定存在实的周期系数的变换[8]

$$z_s = \sum_{j=1}^{n} q_{sj}(t)x_j, \tag{3.3}$$

将方程組(3.1)化为具常系数的方程組

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}z_j \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{3.4}$$

由于假定(3.1)之示性根之模数都小于 1，故知方程組(3.4)之特征方程之特征根

$$\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$$

都具有負实部。因此，对方程組(3.4)一定存在正定二次型

$$V(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}x_ix_j,$$

使对方程組(3.4)有

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=W(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)),$$

而 $W(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ 是負定的。

将方程組(3.2)写成下面形式：

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}[(a_{ij}(t)+b_{ij}(t))x_j(t)+b_{ij}(t)(x_j(t-\tau_{ij})-$$

$$-x_j(t))]=\sum_{j=1}^{n}[(a_{ij}(t)+b_{ij}(t))x_j(t)]+\psi_i(t), \tag{3.5}$$

而

$$\psi_i(t)=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)(x_j(t-\tau_{ij})-x_j(t)) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

将方程(3.5)施行变换(3.3)后得到

$$\frac{dz_s(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}c_{sj}z_j(t)+\Psi_s(t), \tag{3.6}$$

$$\Psi_s(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{sj}(t)(z_j(t-\tau_{sj})-z_j(t)),$$

其中 $a_{sj}(t)$ 里 $q_{sj}(t)$, $q'_{sj}(t)$ 及 $b_{ij}(t)$ 的多項式，亦为 t 的有界連續函数，c_{ij} 为常数。

由方程(3.4)存在正定的李雅普諾夫函数 $V(z_1(t), z_2(t), \cdots,$

$z_n(t))$，对(3.6)有

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial z_i}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}z_j+\Psi_i(t)\right)=$$

$$=W(z_1(t),z_2(t),\cdots,z_n(t))+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial z_i}\Psi_i(t).$$

$W(z_1(t),\cdots,z_n(t))$ 为負定的函数. 以下主要是来估計最后一項

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial z_i}\Psi_i(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(\beta_{ij}+\beta_{ji})x_j(t)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(t)(-\tau_{ij})\frac{dz_j(\xi_{ij})}{dt}\right)\right]$$

$$t-\tau_{ij}\leqslant\xi_{ij}\leqslant t.$$

而以下的估計将完全类似于第四章第一节定理 2 中的証明.

定理 2. 在定理 7 的条件下，若将常时滞換为 t 的連續有界实函数，定理 7 的結論仍成立.

証明亦与定理 7 相同.

定理 3. 設方程(3.1)的示性根至少有一个其模数大于 1，即(3.1)之零解是不稳定的，則存在 $\Delta>0$，使当

$$0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\Delta\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

时，方程組(3.2)之零解也是不稳定的.

只要将方程組(3.5)施行周期性的变換(3.3)，化为方程組(3.6)后，它的特征方程

$$D(\lambda,1)=|c_{ij}-\delta_{ij}\lambda| \tag{3.7}$$

由假定方程(3.1)之示性根至少有一个其模数大于 1 而得出对应的(3.6)之特征方程(3.7)亦至少有一个具正实部的特征根.

定理的証明完全类似于第四章中第二节定理 3 的証明.

应用第一章中提出的方法可以处理非綫性的情形及第一临界情形. 由于在第五章中对第二临界情形举了一个反例，在稳定性上不存在等价关系，故在周期系数的情形也不存在等价关系.

参 考 文 献

[1] E. Volterra, On Elastic Continua with Hereditary Characteristics, *J. Appl. Mech.*, **18** (1951), 273—279.

[2] A. J. Lotka, A Contribution to the Theory of Self-renewing Aggregates with Special Reference to Industrial Replacement, *Ann. Math. Stat.*, **X**, (1939), 1—25.

[3] H. S. Tsien, Engineering Cybernetics, 1954, 97.

[4] M. Kalecki, A Macrodynamic Theory of Business Cycles, *Econometrica*, **3** (1935), 227—344.

[5] Б. В. Гнеденко, Курс Теории Вероятностей, 1954, 67.

[6] N. Minorsky, Control Problems, *Journal of the Franklin Institute*, **232** (1941), 524.

[7] 秦元勳，运动稳定性的一般問題講义，科学出版社，1958.

[8] А. Д. Мышкис, *УМН*, **4**: 5 (1949), 99—141.

[9] Л. Э. Эльсгольц, Устойчивость Решений Дифференциально-разностных уравнений, *УМН*, **94**: 62 (1954), 95 112.

[10] Л. С. Понтрягин, О. Нулях некоторых элеминтарных трасцендентных функций, *Изв. АН СССР*, серия Матем., **6** (1942), 115—134.

[11] 蔡燧林，常系数綫性微分方程組的 Ляпунов 函数的公式，数学学报，**9**:4 (1959).

[12] R. Bellman, On the existence and boundedness of solutions of nonlinear differential-differential equations, *Ann. Math.*, **50** (1949), 347—355.

[13] R. Bellman, On the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 357—386.

[14] И. А. Фрив, Об устойчивости решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием в критическом случае, *Учёные записки*, вып. 181, Матем., **VIII**, МГУ (1956), 73—82.

[15] N. D. Hayes, Roots of the transcendential equation associated with a certain difference-differential equation, *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 226—232.

[16] 秦元勳，稳定性理論中微分方程与微分差分方程的等价性問題，数学学报，**8**: 4 (1958), 457—472.

[17] 秦元勳，刘永清，王 联，稳定性理論中的微分方程与微分差分方程的等价性問題，数学学报，**9**:3 (1959), 333—359.

[18] 王 联，稳定性理論中第一临界情形的微分方程与微分差分方程的等价性問題，数学学报，**10**:1 (1960), 104—124.

[19] 秦元勳，有时滞的系統的无条件稳定性，数学学报，**10**:1 (1960). 125—141.

[20] А. А. Андронов и А. Г. Майер, Простейшие линейные системы с запаздыванием, *Автоматика и Телемеханика*, **7** (1946), 2—3, 95—106.

[21] 刘永清，时滞对动力系統稳定性的影响，科学記录新輯，**4**:2 (1960), 83—87.

[22] 刘永清，微分差分方程解的稳定性，数学进展，**4**:2 (1958), 297—303.

[23] А. Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, 1951.

[24] S. Verblunsky, On a class of differential-difference equations, *Proc. London. Math. Soc.*, **6**: 23 (1956).

[25] Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Проблема Гаусса-Гурвица для полиномов и целых функции, Труды Матем, ин-та им. Стеклова, 26, 1949.